矩阵在线性代数中的地位和作用

杨闻起
(宝鸡文理学院数学系,陕西宝鸡 721007)

摘 要:通过论述矩阵与行列式、线性方程组、线性空间,线性变换、欧氏空间和二次型之间的关系,说明了矩阵在线性代数中的地位和作用,并强调在学习线性代数时,应充分重视矩阵与其它概念之间的互相利用.

关键词:矩阵;行列式;线性方程组;二次型;线性空间;线性变换
中图分类号:O151.21　**文献标识码**:A　**文章编号**:1008-3030(2003)01-0073-02

线性代数是理工科基础课之一,主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换和欧氏空间共七部分,其中矩阵是各部分内容的纽带,具有十分重要的地位和作用.

1 矩阵为行列式的计算提供了新的技巧

所有的《线性代数》教材都把行列式作为第一部分,由于暂时没有学习矩阵知识,所以计算行列式的方法仅限于定义法、化三角形法、降阶法、递推法和加边法[3].但是在具备了矩阵知识之后,矩阵为行列式的计算提供一些新的技巧.

例 1

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \quad (n>2)$$

由于 D_n 的第 i 行第 j 列元素可分解为

$$a_i-b_j=(a_i,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} 1 \\ -b_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以该行列式对应的矩阵可分解为两个矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & \cdots & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

以上两个矩阵的行列式显然为 0,于是由公式 $|AB|=|A|\cdot|B|$ 得到,$D_n=0\times0\equiv0$.

例 2 设 A 是三队实对称矩阵,$A^2=E$ 且 $\mathrm{rank}(A-E)=1$,求行列式 $|A-2E|$.

由于矩阵的行列式等于它的全部特征值之积,所以可用求特征值的办法计算行列式.先设 λ 是 A 的特征值,ξ 是 λ 的特征向量,那么 $A\xi=\lambda\xi$,于是 $A^2\xi=\lambda^2\xi$, 但 $A^2=E$, 所以,$(\lambda^2-1)\xi=0$, 所以 $\lambda=\pm1$,又由 $\mathrm{rank}(A-E)=1$ 知,1 必是 A 的二重特征值,于是 A 的全部特征值为 1,1,-1,从而 $A-2E$ 的特征值为-1,-1,-3.

所以 $|A-2E|=(-1)\times(-1)\times(-3)=-3$.

2 矩阵是求线性方程组的解和判别解的情况的最佳工具

首先, 线性方程组可以用矩阵表示为 $AX=b$,这种表示形式十分方便.其次,解线性方程组的基本方法是消元法, 消元法的本质就是对线性方程组的增广矩阵进行初等变换.最后,用矩阵的秩能刻画线性方程组解的情况, 当系数矩阵的秩($\mathrm{rank}B$)与增广矩阵的秩($\mathrm{rand}B$)不相等时,线性方程组无解;当 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$ 时,线性方程组有解,如果 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$ 还等于未知量的个数, 那么线性方程组有唯一解, 如果 $\mathrm{arnk}A=\mathrm{rand}B$ 小于未知量的个数,那么线性方程组有无穷多个解.这些结论足以说明,矩阵是研究线性方程组的最佳工具.

3 对称矩阵是二次型的简化形式

由于二次型与对称矩阵之间是一一对应关

收稿日期:2002-10-20
作者简介:杨闻起(1962-),男,陕西岐山人,宝鸡文理学院讲师

系,二次型的化简实质上也是对称矩阵的合同变换,而且二次型有什么概念和结论(例如正定、惯性指标等),对称矩阵也有相应的概念和结论,所以研究二次型本质上就是研究对称矩阵,也就是说,二次型可以简化对称矩阵.

4 矩阵组成线性空间的一个特例,也成为线性空间的研究工具

一方面,数域P上的全体$m\times n$矩阵组成一个线性空间$P^{m\times n}$,为线性空间提供一个重要实例.另一方面,矩阵能准确地表达有限维线性空间的两组基之间的关系和同一向量关于不同基的坐标,利用矩阵的可逆性还可以判断向量的线性相关性和向量组的等价性,所以,矩阵是研究线性空间的重要工具.

5 矩阵是线性变换的化身

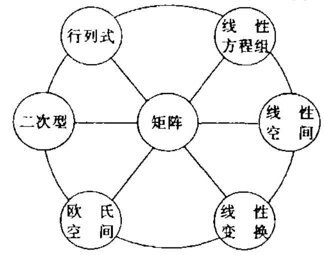
由于在取定了n维线空间V的基之后,v的线性变换与n阶矩阵之间是一一对应关系,且线性变换的运算与矩阵的运算也保持一致,也就是说,线性变换与矩阵是两个同构的代数系统,所以在代数意义下,矩阵与线性变换没有本质区别.例如,用线性变换作用于一个向量,就相当于用矩阵乘以该向量的坐标,线性变换的特征值也就是矩阵的特征值,线性变换的对角化也就是矩阵的对角化.因此,我们可以形象地说,矩阵就是线性变换的化身.

6 正定矩阵、正交矩阵对称矩阵很好地刻画了欧氏空间

一方面,在有限维欧氏空间中,每组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$都对应着一个度量矩阵,且度量矩阵是正定的.反过来,也可以用矩阵的性质来判别欧氏空间的基,具体地说,由矩阵是否正定可以判别向量组是否为基,由矩阵是否为对角阵判别向量组是否为正交基,由矩阵是否为单位阵还可以判别向量组是否为标准正交基.

另一方面,由于欧氏空间中两个标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵,所以用正交矩阵能刻划欧氏空间两个标准正交基之间的关系.更重要的是,欧氏空间上的线性变换σ是正交(对称)变换当且仅当σ关于标准正交基的矩阵是正交(对称)矩阵,这就是说,正交矩阵和对称矩阵分别刻划了欧氏空间中的正交变换和对称变换.

以上论述说明,矩阵作为线性代数中的重要工具,已渗透到其它各章内容之中,并成为行列式、线性方程组、线性空间、欧氏空间和二次型的纽带,把线性代数各个章节贯串成为一个整体(如下图).



在学习线性代数的过程中,应注意以下三点:第一,初学矩阵这章内容时,要深刻理解矩阵的逆和秩的概念及性质,熟练掌握矩阵的运算,特别是分块矩阵的计算技巧,并多作一些课外习题,为学好线性代数的其它内容打好基础.第二,由于矩阵的其它知识(如正定、相似、特征值等)还分散在其它章节中,在学习过程中,要及时汇总矩阵知识,以保证对矩阵知识有一个全面系统的理解.第三,要特别重视矩阵与线性变换和二交型等知识的相互作用.也就是说,要利用矩阵知识解决线性变换和二次型中的问题,也要利用线性变换和二交型知识来解决矩阵的问题.

(责任编辑:乔希民)

参考文献:

[1]北京大学数学系.高等代数[M].北京:高等教育出版社,1988
[2]同济大学数学教研室.线性代数[M].北京:高等教育出版社,1999
[3]马来焕,安键.高等代数学习研究[M].西安:西北大学出版社,2001

The Position and Action of Matrix in Linear Algebra

YANG Wen-qi
(Dept,of Maths,Baji coll,Arts Sci.,Baoji 721007,Shaanxi China)

Abstract: By discussing relation matrix and determinant,system of linean equatios,quadric form,near space,linear transformation,or Euclideam space,the position and action of matrix in linear alge-are explained.

Key Words: Matrix;determinant;linear space;linear transformation