矩阵在《线性代数》中的地位

任芳国
(陕西师范大学数学与信息科学学院 讲师、博士研究生 西安 710062)

摘 要: 矩阵理论是数学发展中的重要分支, 在线性代数中居于核心地位, 本文从矩阵与线性代数的联系、矩阵自身的发展及矩阵的应用三个方面来论述矩阵的地位, 对于学习线性代数具有一定的指导性.

关键词: 矩阵; 行列式; 线性空间; 线性变换
中图分类号: O151.21 文献标识码: A 文章编号: 1009-3826(2002)04-0096-03

1 引言

自 1812 年柯西引入矩阵概念以来, 矩阵理论已成为数学发展中的一个重要分支, 既是学习经典数学的基础, 又是一门最有实用价值的数学理论, 并且已成为现代科技领域处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力的工具. 《线性代数》作为高等院校理工科学生必修的一门科目, 基本内容包括: 行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换、欧式空间等理论, 而矩阵在线性代数中处于核心地位. 下面将从矩阵与线性代数的联系、矩阵自身发展以及矩阵的应用来论述矩阵的核心地位[1-5].

1.1 矩阵的基本概念

为了论述方便, 引入以下定义及引理:

1.1.1 定义 设 S 是一个集合, 由 S 中 mn 个元素所排成的 m 行 n 列的表:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 S 上的 mn 矩阵, 简称 $m\times n$ 矩阵, 记为 $(a_{ij})_{m\times n}$, 常用 A, B, C…大写字母表示一个矩阵, S 上所有 $m\times n$ 阶矩阵作成的集合记为 $M_{m\times n}(S)$, 若 $m=n$ 时, $M_{m\times n}(S)$, 简记为 $M_n(S)$, 以下主要讨论定义在数域 F 上的 $m\times n$ 阶矩阵. 通常 $M_n(F)$ 在矩阵加法、数乘、乘法运算下, 既是一个线性空间, 又是一个环, 即 $M_n(F)$ 成为一个代数. 若 $F=C$ 时, 取定: $D=\mathrm{dia}(d_i,\cdots,d_n)$

且 $d_i>0(i=1,2,\cdots\cdots n)$, 作映射 Ψ: $M(C)\times M(C)\to C$, 使 $\Psi(A,B)=T_r(DA^HB)$, 这时 $M_n(C)$ 就成为一个酉空间; 若 $F=R$, 则 $M_n(R)$ 就是一个欧氏空间, 其中 A^H 表示矩阵 A 的共轭转置.

1.1.2 基本引理

引理 1[6-7] $M_{m\times n}(F)$ 中任一矩阵经过初等行变换与一个阶梯形矩阵等价.

引理 2[6-7] 等价矩阵有相同的秩.

引理 3[6-7] 任一个对称矩阵都与一个对角矩阵合同.

引理 4[6-7] 任一个矩阵都与一个若当标准形相似.

2 矩阵与线性代数的联系

2.1 矩阵与行列式的联系

行列式是线性代数的一个重要工具, 人们在定义 n 阶行列式时, 通常有两种方法: 一种是用处于不同行不同列的数之积的代数和, 另一种方法是用递归公式将 n 阶行列式表示为 $(n-1)$ 阶行列式求和来定义 n 阶行列式.

实际上 n 阶行列式是 n 阶方阵集合到数域上的一个映射, 让一个方阵与唯一的一个数对应. 本文以矩阵为工具, 采用公理化的定义, 可以更加深刻理解矩阵与行列式的联系, 可使行列式的性质变得简便, 更容易记忆和应用.

2.1.1 定义 设 F 是数域, f 是 $M_n(F)$ 到 F 的一个映射, 若 f 满足:

(1) $f(AB)=f(A)f(B)$, $\forall A,B\in M_n(F)$;

(2) $f(A^T=(A)$, 其中, A^T 为 A 的转置.

(3) 当 A 为 n 阶上三角阵,

$$\text{即 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{an} \end{pmatrix} \text{ 时,}$$

$f(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$, 这时称 f 是定义在 $M_n(F)$ 上 n 阶行列式函数.

(4) 如果 $n\in N$, n 阶行列式函数 f 存在且唯一, 那么对于 n 阶方阵 A, f(A) 称为 A 的行列式, 记为

收稿日期 2002-09-05
陕西师范大学 2002 年度青年基金资助项目

det(A).

2.1.2 推论(1) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(2) 对 n 阶初等矩阵 $P(i(c))$, $P(i,j(k))$, $P(i,j)$ 有 $\det P(i(c)) = c$, $\det P(i,j(k)) = 1$, $\det P(i,j) = -1$ (由于 $P(i,j) = P(j,i(-1))P(i,j(1))P(j,i(-1))P(i(-1))$)

根据矩阵乘积与初等变换的关系,易证 n 阶行列式函数具有如下性质:

(i) 调换两行的位置,行列式反号;

(ii) 以一数乘行列式某一行相当于用这个数乘以此行列式;

(iii) 把行列式的某一行的倍数加到另一行,行列式不变;

而这些正是一般 n 阶行列式满足的基本性质[7],若用行列式公理化理解行列式性质,既准确,且易于学生接受.

2.2 矩阵与线性方程组的联系

解一个 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

实质上就是对矩阵进行初等行变换,

即增广矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

经过初等行变化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, ($i = 1, 2, \cdots\cdots r$),来判断方程组是否有解:

(1) 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时,方程组无解;

(2) 当 $d_{r+1} = 0$ 时,方程组有解,这样只要知道引理 1,我们就会有信心按照一定的程序求解方程组的一般解[7-10].

2.3 矩阵与线性空间的联系

2.3.1 线性空间的定义[7]

2.3.2 在 n 维线性空间 V 中取一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots \epsilon_n$,并且作映射 $\Psi: V \to M_{1\times n}(F)$,使 $\Psi(a) = (a_1, \cdots\cdots a_n)$ 其中 $a = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots\cdots + a_n\epsilon_n$, aGv 在这种情况下,$\Psi$ 既是双射,又保持线性运算,即 V 与 $M_{1\times n}(F)$ 同构,从而可将 n 维线形空间的研究完全转化矩阵 $M_{1\times n}(F)$ 的研究,即直观明了,又体现了数学美.

2.4 矩阵与线性变换的联系

2.4.1 定义 线性空间 V 的一个变换 f 称为线性变换,如果对于 V 中任意元素 α, β 和数域 p 的任意数 k,都有:

$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$:

$f(k\alpha) = kf(\alpha)$;

2.4.2 把 n 维线性空间 V 上的所有线性变换组成的集合记为 L(V),作映射 $\Psi: L(V) \to M_n(F)\ \Psi(f) = A$(任意 $f \in L(V)$);

其中 A 是线性变换 f 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots \epsilon_n$ 的矩阵. 显然可知 Ψ 保持线性运算,乘法、保逆运算,即 L(V) 同构于 $M_n(F)$[6-7],从而将 L(V) 的研究完全转化为对 $M_n(F)$ 的研究,如线性变换的特征值问题,线性变换在同一组基下的矩阵的问题又转化为矩阵相似问题;线性变换的对角化问题转化为矩阵与对角形的相似,从而可以使学生更深刻、更系统的理解线性变换.

2.5 矩阵与二次型的联系

2.5.1 定义 设 S 是一个集合,取定 $x_i \in S$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots n$) 元素,$A = (a_{ij})_{n\times m} \in M_n(F)$,则称 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = X^TAX$ 为数域 F 上的 n 元二次齐次多项式,简称二次型,其中 $X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$ 注意二次型 X^TAX 并不能由 A 唯一决定,但若将 A 对称化,即令 $B = 1/2(A + A^T)$,则 $X^TAX = X^TBX$,即二次型 X^TAX 对应唯一的对称阵. 因此定义二次型 X^TAX 矩阵为对称矩阵 $1/2(A + A^T)$,即二次型的矩阵为对称;

一般若 $f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}x_ix_j$ (2) 为 F 上的一个二次型,令 $b_{ii} = a_{ii}$, $b_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}$, $b_{ji} = b_{ij} (j > i)$,显然有 $f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n) = \sum_{1 < i < j < n}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TBX$,其中 $B = (b_{ij})_{n\times n}$,

总之对二次型引入矩阵以后,一个 n 元二次型可表示为 $f(X) = X^TBX$,其中 $B = B^T$, $X = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$,

即矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

即二次型完全可用对称矩阵的形式表示,唯一表示,而且二次型在线性替换前后,矩阵是合同的,从而将一个二次型标准化的问题转化为对称矩阵与一个对角矩阵合同的问题,由引理 3 可知,任意一个二次型可化为标准形.

一般化二次型为标准形,许多同学往往用配方法. 我认为这种方法比较复杂,不如用矩阵法(公式法、初等变换法)化二次型为标准型,既简单明了,又便于掌握. 如用初等变换法化二次型 $f(X) = X^TBX$,其中 $B = B^T$,为标准型,

即对 $\begin{pmatrix} B \\ E \end{pmatrix}$ 同时施行行列变换, 将其化为 $\begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$ 即 C 为所作的替换矩阵, D 为标准形对应的的对角矩阵.

2.6 矩阵与欧氏空间的联系

2.6.1 定义 设 V 是实数域 R 上的线性空间, V 上定义了一个二元实函数, 称为内积, 记作$(a、\beta)$,它具有以下性质:

1) $(a、\beta) = (\beta、a)$;

2) $(Ka、\beta) = K(a、\beta)$;

3) $(a+\beta、\gamma) = (a、\gamma) + (\beta、\gamma)$

4) $(a、a) \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时, $(a、a) = 0$;

这是 $a、\beta、\gamma$ 是 V 中的任意向量, K 是任意实数, 这样的线性空间 V 称为欧几里德空间.

2.6.2 设 V 为实数域上的任一个 n 欧氏空间 V, 若 Ψ 是 V 上的内积, 则可以在 $M_{1\times n}(R)$ 上定义 $\Phi(x, y) = \Psi(\alpha, \beta)$, 对任意 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 其中 $\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$, $\beta = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2 + \cdots + y_n\epsilon_n$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基. 从而 Φ是 $M_{1\times n}(R)$ 上的内积, 且这两个空间同构, 即欧氏空间与 $M_{1\times n}(R)$ 同构, 因此在内积 $T_r(x^H y)$ 下, 我们只研究 $M_{1\times n}(R)$, 从而将一般将欧氏空间的研究转化为欧氏空间 $M_{1\times n}(R)$ 或 $M_{n\times n}(R)$ 的研究, 故只在 $M_{1\times n}(R)$ 上对研究施密特正交化方法、正交变换、对称变换, 并可以将结果推到一般的欧氏空间.

可见线性代数是以矩阵为主线, 只要掌握了矩阵的基本概念、基本性质, 可将行列式、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换及欧氏空间有机联系起来, 形成一个系统体系, 从而更易于学生掌握.

3 矩阵自身发展

3.1 矩阵代数结构丰富

线性空间$(m \neq n) \xrightarrow[\text{乘积}]{m=n}$代数$\xrightarrow{\text{内积}}$度量空间(包括欧氏空间、酉空间)$\xrightarrow{\text{范数}}$拓扑空间.

3.2 矩阵运算规则灵活

在矩阵上可定义加法、数乘、乘法、转置、广义逆、Hadamard 积、张量积等各种运算, 且满足不同的运算规则, 如矩阵具有交换律(加法) ⟶结合律(加法、乘法) ⟶分配律(乘法对加法), 但其乘法不具有消去律, 且不适合交换律, 因此, 矩阵既有与数相同的性质又有自身的特性, 在学习中要深刻理解与数的不同, 这样我们可以通过对比理解其运算规则.

3.3 矩阵的内容充实

矩阵包括矩阵标准形、矩阵范数、矩阵特征值估计、矩阵分解、矩阵扰动、广义逆矩阵、矩阵数值域内容. 矩阵不仅在理论有用, 而且在实践中有一定价值.

3.4 阵的种类多样

矩阵包括: 单位矩阵、初等矩阵、对称矩阵、Hermitian 矩阵、酉矩阵、半正定矩阵、正规矩阵、稳定矩阵、M—矩阵、P—矩 、非负矩阵等, 它们都来自对控制问题、稳定问题、经济问题等实际问题的研究.

毫无疑问 ,矩阵的发展对线性代数的发展具有指导作用.

4 矩阵在应用领域的作用

矩阵在理论领域中固然处于核心地位, 在应用领域中的作用也很重要. 矩阵的应用是非常广泛的, 我们在日常生活中无意识的应用着矩阵, 像旅程时间表、学校用的课表, 以及其他与行列有关的图表; 在科技飞速发展的今天, 矩阵在其他学科中有着重要的作用, 如物理学、生态学、社会学、信息科学、计算机编程、控制论、统筹学等, 在经济领域和交通部门都有着重要的用途.

综上所述, 我们从矩阵与线性代数的联系、矩阵自身发展及它的应用三方面进行了论述, 充分体现了矩阵的突出地位. 因此, 我们在学习线性代数时, 要认真把握矩阵的基本性质及运算规则. 总之, 矩阵是从生产实践和科学技术问题中的抽象出来的一个数学概念, 它在线性代数中既是最基本的研究对象又是最重要的研究工具, 贯穿于线性代数的各个方面, 在线性代数中处于核心地位, 而且为今后深入学习打下了良好基础.

参考文献〕

[1] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix, Analysis, Cambridge, bress, New, York*, 1985.

[2] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in matrix Analysis, Cmbridge uniwersity press, New York*, 1991.

[3] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

[4] 孙继广. 矩阵扰动分析[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[5] 徐仲. Toeplitz 矩阵类的快速算法[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.

[6] 张禾瑞. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社(第 4 版), 1997.

[7] 北京大学几何与代数教研室. 高等代数(第 2 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[8] 赵树嫄. 线性代数[M](第三版). 北京: 中国人民大学出版社, 1997.

[9] 熊全淹. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[10] 同济大学. 线性代数[M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.

责任编辑 张淑霞〕