对正弦定理和余弦定理的研讨

黄汉禹

（上海市中职数学教材编写组（上教版） 上海翔申学校 201102）

正弦定理和余弦定理是解三角形的理论根据. 解三角形有着广泛的实际实用，对培养学生分析问题和解决问题的能力很有裨益，因而每年高考总有这方面的试题. 然而笔者在教学实践中感到，执教者往往对这两个定理的认识和理解比较肤浅，有必要对之进行研讨，以提升执教者的教学业务水准.

1 解三角形除了应用正弦定理和余弦定理外，还有其他定理吗？如果有，还有几个

三角形的三条边和三个内角是三角形的基本元素，所谓解三角形就是由三角形足够个数的已知元素来求未知元素（通常还包括求三角形的面积），或者判定所求的基本元素不存在.

正弦定理和余弦定理是刻划三角形 6 个基本元素中 4 个元素之间的基本关系（注意：本文所指的基本关系是指基本等量关系）. 解三角形除了应用这两个定理外（现行中学教材一般只讲这两个），还有一个定理，即射影定理，它是刻划三角形 6 个基本元素中 5 个元素之间的基本关系，这三个定理用式子表示分别是：

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

射影定理：$a=b\cos C+c\cos B$，
$b=c\cos A+a\cos C$，
$c=a\cos B+b\cos A$.

解三角形除了应用这三个定理外，还有没有其他的定理呢？答案是否定的. 这可以从定理中元素构成的成分进行分析.

我们知道，从 6 个元素中取 4 个元素的组合数共有 $C_6^4=15$；也就是说，从三角形的三条边和三个角中，任意取出四个元素所能构成的关系式应当有 15 个，而这 15 个关系式可以分为三类：取三条边和一个角的有 $C_3^3C_3^1=3$ 种；取两条边和两个角的有 $C_3^2C_3^2=9$ 种；取一条边和三个角的有 $C_3^1C_3^3=3$ 种. 这三类关系式可列表如下（表 1）：

表 1 三角形中从 6 个元素中取 4 个元素的所有关系

三边、一角有 $C_3^3C_3^1=3$ 种	两边、两角有 $C_3^2C_3^2=9$ 种	一边、三角有 $C_3^1C_3^3=3$ 种
这种情形就是余弦定理： (1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， (2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$， (3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.	这种情形就是正弦定理： (1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，(2) $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，(3) $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$. 或者 (4) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin(A+C)}$，(5) $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin(A+B)}$， (6) $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin(B+C)}$，(7) $\dfrac{a}{\sin(B+C)}=\dfrac{b}{\sin B}$， (8) $\dfrac{b}{\sin(A+C)}=\dfrac{c}{\sin C}$，(9) $\dfrac{c}{\sin(A+B)}=\dfrac{a}{\sin A}$.	不存在这样的关系式. 因为含有一条边和三个角只有如下三种情形： (1) a、A、B、C， (2) b、A、B、C， (3) c、A、B、C. 而在含有这样四个元素的关系式中，若知道其中三个角，是无法求出第四个元素——“边”来. 这就是说，这样的关系式是根本不存在的.

由此可知，正弦定理、余弦定理概括了三角形中 6 个基本元素中取 4 个元素的所有可能具有的关系.

由于从三角形的 6 个元素中取 5 个元素的关

系式，按组合数公式，共有 $C_6^5=6$（个），也就是只有6种情形．其中包括含有三条边和两个角的三个关系式，这就是射影定理；而含有两条边和三个角的关系式显然不存在的．这就是说，射影定理概括了三角形中六个基本元素中取五个元素的所有可能具有的关系．

综上所述，可以知道，对于任意三角形来说，含有四个或者五个基本元素的所有可能具有的关系式，只可能有上述三个定理了．除这一情况和三角形内角和定理外，不存在任何其他等量关系．

2．正弦定理和余弦定理分别都用三个式子来表述，那么这三个式子之间是相互独立的，还是相互从属的？为什么？

很明显，正弦定理可表达成三个关系式，这三个关系式中的任意两个，可推导出第三个．这就是说，这三个关系式之间是相互从属的．但是，其中的任意两个之间的关系，却是各自独立的．因为，我们不能从任意两个关系式中的一个推导出另一个来，而任意两个关系式与三角形的内角和定理构成了一个独立的关系式组：

$$\begin{cases}A+B+C=180^\circ,\\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B},\\ \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.\end{cases}$$

再看余弦定理．如同正弦定理一样，其中任意两个之间的关系是各自独立的，它们连同三角形的内角和定理一起构成另一个独立的关系式组：

$$\begin{cases}A+B+C=180^\circ,\\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.\end{cases}$$

由这个独立的关系式组，可以推导出余弦定理的第三个关系式．我们作如下推导：

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos(A+B)\\&=\sin A\sin B-\cos A\cos B\\&=\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)}-\cos A\cos B.\end{aligned}$$

将 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，代入上式，得

$$\cos C=\sqrt{\left[1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right]}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

化简，得 $\cos C=\dfrac{1}{4abc^2}[2(a^2c^2+b^2c^2-c^4)]=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

即得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

同理，射影定理的任意两个关系式和三角形的内角和定理，也构成一个独立的关系式组：

$$\begin{cases}A+B+C=180^\circ,\\ a=c\cos B+b\cos C,\\ b=a\cos C+c\cos A.\end{cases}$$

从这个关系式组可以得出射影定理的第三个关系式．读者可以自行推导．

研究上述三个定理的关系式的独立性问题，有着重要意义．可以看到，无论在哪一个独立关系式组里，都有 $A+B+C=180^\circ$ 这个关系式．这说明，无论上述三个定理中的哪一个定理，都推导不出三角形的内角和定理．同时，每个独立关系式组中都含有边的元素．这就告诉我们，构成一个三角形要有三个独立条件，其中至少要有一条边．

3 正弦定理和余弦定理等价吗

结论是肯定的．不仅正弦定理和余弦定理是等价的，而且它们与射影定理一起，三个定理之间是相互等价的，即正弦定理⇔余弦定理⇔射影定理．

3.1 正弦定理与余弦定理的等价性证明

由正弦定理⇒余弦定理

由正弦定理，得

$$\sin A=\frac{a}{k},\sin B=\frac{b}{k},\sin C=\frac{c}{k}(k>0),\quad(1)$$

由三角形内角和定理，知

$\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$，

即 $\cos B\cos C=\sin B\sin C-\cos A$，

两边平方，得 $\cos^2 B\cos^2 C=\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 A-2\sin B\sin C\cos A$.

即 $(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)=\sin^2 B\sin^2 C+(1-\sin^2 A)-2\sin B\sin C\cos A$.

化简，得

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A. \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式,并化简,得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

同理,可证余弦定理的其他两个关系式.

由余弦定理⇒正弦定理

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, (1)

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. (2)

(1)－(2)得

$a^2-b^2=b^2-a^2-2bc\cos A+2ac\cos B$,

$2(a^2-b^2)=2c(a\cos B-b\cos A)$.

所以 $c=\dfrac{a^2-b^2}{a\cos B-b\cos A}$. (3)

(3)代入(1),得 $a^2=b^2+\left(\dfrac{a^2-b^2}{a\cos B-b\cos A}\right)^2-2b\left(\dfrac{a^2-b^2}{a\cos B-b\cos A}\right)\cos A$.

化简,得 $(a^2-b^2)(b^2\sin^2 A-a^2\sin^2 B)=0$.

若 $a^2-b^2=0$, 则 $a=b$.

于是 $A=B$,

即得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

若 $a^2\sin^2 B-b^2\sin^2 A=0$,

由于 $a,b,\sin A,\sin B$ 都是正数,

故 $a\sin B=b\sin A$,

即得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

同理可证正弦定理的其他两个关系式.

3.2　余弦定理与射影定理的等价性证明

由余弦定理⇒射影定理

由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, (1)

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. (2)

(1)＋(2)得

$b^2+c^2=2a^2+b^2+c^2-2ac\cos B-2ab\cos C$,

化简,并由 $a\neq 0$,得

$a=b\cos C+c\cos B$.

同理,可证射影定理的其他两个关系式.

由射影定理⇒余弦定理

由 $b=a\cos C+c\cos A$,得

$\cos C=\dfrac{b-c\cos A}{a}$. (1)

由 $c=a\cos B+b\cos A$,得

$\cos B=\dfrac{c-b\cos A}{a}$. (2)

(1)、(2)代入 $a=b\cos C+c\cos B$,得

$a=b\cdot\dfrac{b-c\cos A}{a}+c\cdot\dfrac{c-b\cos A}{a}$.

化简,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理,可证余弦定理的其他两个关系式.

由等价的传递性可知正弦定理与射影定理等价.有兴趣的读者亦不妨尝试直接证明之.

4　正弦定理和余弦定理的逆命题是什么

我们已经知道,任何一个三角形的边和角之间的关系都满足正弦定理、余弦定理.现在我们提出一个与此相反,并且具有重要意义的问题.如果有三个正数 a、b、c 和分别与之对应的三个小于 180°的正角 A、B、C,它们满足这两个定理中的任意一个,那么,这三个数所对应的线段和这三个角是否一定能够构成唯一的三角形呢?这个问题正是应用这些定理解三角形的理论依据.这有下列定理:

若有三个正数 a、b、c 和分别与之对应的三个小于 180°的正角 A、B、C,并且它们满足正、余弦定理中任意一个,则 a、b、c 三个数所对应的线段和三个角 A、B、C 一定能够构成唯一的三角形.

要证明这个命题应从两方面考虑:首先,必须证明 a、b、c 中任意两数之和大于第三数,即 a、b、c 三数所对应的线段一定可以构成一个三角形;其次,要证明这个三角形的三个角一定是 A、B、C.

一方面,由正、余弦定理的等价性,不妨设这六个元素满足余弦定理,即

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

因为 $|\cos A|<1$,

所以 $b^2+c^2-2bc\cos A<b^2+c^2+2bc$,

即 $b^2+c^2-2bc\cos A<(b+c)^2$.

所以 $a^2<(b+c)^2$.

$a>0$,$b+c>0$,

即 $a<b+c$.

同理可得,$b<a+c$,$c<b+a$.

这就是说,a、b、c 所对应的线段一定能够构成一个三角形.

另一方面,设 A' 为 a 边的对角,那么由余弦定理,得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A'$.

但假设 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

(下转第 26 页)

去了信心,失去了兴趣.因此,教师全面地了解和把握高中数学新课程内容体系和安排很有必要也很重要!

3 重视学法指导,帮助学生养成良好学习习惯

造成高一新生数学学习严重分化,影响初高中过渡效果的另一个重要方面是学生的学习习惯和学习方法问题,而且这一问题一直没有引起多数教师的特别关注.我们在教学中发现高一新生的学困生当中既有知能有缺陷的学生,也有一部分初中数学基础和能力很不错的学生,这其中一部分是主观努力不够,另一部分则是由于习惯和方法不当的问题,而且那些与其说是主观努力不够的学生多数也是不知如何努力.

高中数学内容在教学总量、抽象性、难度上都远高于初中,这使得课堂的容量也较大,课堂的学习只能达到学懂知识,而难以达到会用知识,这也是学生到了高中后,出现课上听得懂,课下作业不会做的现象成因之一.如果不能及时引导学生认识到自己学习习惯与方法的不足,需要根据高中学习特点进行调整,就很容易使学生转化为学困生.而根据我们教研组老师的调查,尽管进入高中之后,班主任及学科老师多次强调初高中的学习特点不同,要逐步摸索并形成适合自己的良好学习方法和习惯,但我们的学法调查表显示:高一学生能做到先看书、整理课堂笔记、再独立做作业;完成作业后总结思路和方法;不是靠考前突击复习,而是坚持平时复习的学生比例与初三学生相比高不了多少.因此,如何制定一些切实可行的措施方法促使学生尽快养成良好的学习习惯是我们要认真思考的问题,我们的做法是:充分利用有利时机,如在入学之初第一次检测之后,举行学法指导的主题班会课,请学科教师讲学习方法;请往届的优秀学生、在校高三的学兄学姐谈谈他们入学适应学习的经验;召开学习心得交流会,预先指定几个学习习惯方法比较好的同学发言,调动其他同学参与互动交流与评论,等等.当然,尽管通过教师的学法指导,学生认识到了好的学习习惯对自己学习的重要性,但是学生缺乏自我严格要求与约束,往往很难长期坚持.因此,不能高估学生的自觉性,良好习惯的养成完全靠自觉是不行的,必要的行为约束是很重要的.我们在高一开始的第一个月,每天规定在统一的自习课内完成数学课堂作业,辅导老师到班检查督促学生,必须先看书、看笔记复习、再完成作业;同样,在自习课或章节自测课则要求学生先进行阶段和章节复习后完成单元检测.这样坚持一个多月后,调查结果表明,多数学生感到收获很大,有所触动,切身体会到科学的学习方法和良好的学习习惯真的可以事半功倍.

总之,初高中衔接与过渡问题虽已提出多年,但至今未能很好地解决,我们依然还常常听到教师的抱怨、看到学生的无奈无助,事关高一新学生学业的进步和今后人生的发展.作为高中数学教育工作者,还需不断努力思考解决问题的的良策,勇于实践.只有使学生早日掌握科学的学习方法,养成独立思考的学习习惯,使他们真正想学、乐学、会学,同时科学合理地规划和设计我们的教学,美好的教学愿景才能变成现实.

参考文献

1 王尚志,张思明.普通高中数学课程分析与实施策略.北京:北京师范大学出版社,2010

2 陈国才.加强针对性和有效性帮助学生尽快适应高中学习.基础教育参考,2009,5

3 牟彩娥.初高中数学衔接中的问题分析和对策研究.考试周刊,2009,22

4 谈际国.数学教学研究(甘肃),2008,10

(上接第23页)

所以 $\cos A' = \cos A$,

因为 A 和 A' 都是 $0°$ 和 $180°$ 之间的角,所以 $A' = A$.

这就是说,a 边的对角一定是 A.

同理可得,b 边的对角一定是 B,c 边的对角一定是 C.

由此可知,这六个元素能够构成唯一的一个三角形,这个逆定理非常重要.也只有证明了它,我们才可以应用这些定理来解三角形.

参考文献

1 [法]C·布尔勒著.吴文潞译.初等数学教程(平面三角),上海:上海科学技术出版社,1965,5

2 黄汉禹编.解三角形.上海:上海教育出版社,1981,2