

2012年高考数学陕西卷理科第21题的教学分析(续)

罗增儒(陕西师范大学数学与信息科学学院)

误解1: 因为对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 有 $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leq 4$, 更有

$$|1+b| = |f_2(1) - f_2(0)| \leq 4,$$

$$\text{即 } -4 \leq 1+b \leq 4,$$

$$\text{得 } -5 \leq b \leq 3.$$

所以, b 的取值范围为 $[-5, 3]$.

误解2: 由 $b = f_2(1) - f_2(0) - 1$, 有

$$|b| = |f_2(1) - f_2(0) - 1|$$

$$\leq |f_2(1) - f_2(0)| + 1 \leq 4 + 1 = 5.$$

所以, b 的取值范围为 $[-5, 5]$.

误解3: 在 $[-1, 1]$ 上取值 0, 及 $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, 有

$$\begin{cases} f_2(0) = c, \\ f_2(t) = t^2 + bt + c, \end{cases}$$

消去 c , 可解得

$$b = \frac{f_2(t) - f_2(0)}{t} - t, 0 < |t| \leq 1,$$

$$\text{有 } |b| = \left| \frac{f_2(t) - f_2(0)}{t} - t \right|$$

$$\leq \left| \frac{f_2(t) - f_2(0)}{t} \right| + |t|$$

$$\leq \frac{4}{|t|} + |t| \text{ 对任意的 } t \in [-1) \cup (0, 1] \text{ 恒成立.}$$

但函数 $y = \frac{4}{t} + t (0 < t \leq 1)$ 在 $t = 1$ 时取到最小

值, 故得

$$|b| \leq \min_{0 < |t| \leq 1} \left\{ \frac{4}{|t|} + |t| \right\} = 5.$$

所以, b 的取值范围为 $[-5, 5]$.

误解4: 对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 有

$$2bx_1 = f_2(x_1) - f_2(-x_1),$$

$$2bx_2 = f_2(x_2) - f_2(-x_2),$$

$$\text{相减, 得 } 2b(x_1 - x_2) = [f_2(x_1) - f_2(x_2)] - [f_2(-x_1) - f_2(-x_2)],$$

$$\text{有 } |b(x_1 - x_2)| =$$

$$= \left| \frac{[f_2(x_1) - f_2(x_2)] - [f_2(-x_1) - f_2(-x_2)]}{2} \right|$$

$$\leq \frac{|f_2(x_1) - f_2(x_2)| + |f_2(-x_1) - f_2(-x_2)|}{2}$$

$$\leq \frac{4+4}{2} = 4 \text{ 对任意的 } x_1, x_2 \in [-1, 1] \text{ 恒成立,}$$

$$\text{得 } 2|b| = \max_{x_1, x_2 \in [-1, 1]} |b(x_1 - x_2)| \leq 4,$$

$$\text{即 } |b| \leq 2.$$

所以, b 的取值范围为 $[-2, 2]$.

说明3: 这一问与下述高中联赛题(例2)的形式有点类似, 都是二次函数在闭区间上给出一个绝对值不等式求某个系数的取值, 但数学结构有差异:

例2 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f'(x)| \leq 1$. 试求 a 的最大值. (2010 年高中数学联赛第9题, 参见文[3])

说明4: 这一问与下述高考题第(Ⅲ)问(例3)形式上也有点类似, 都是双变量绝对值不等式:

例3 设函数 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上, $f(1) = 0$, 导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = f(x) + f'(x)$.

(I) 求 $g(x)$ 的单调区间和最小值;

(II) 讨论 $g(x)$ 与 $g\left(\frac{1}{x}\right)$ 的大小关系;

(III) 是否存在 $x_0 > 0$, 使得 $|g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{x}$

对任意 $x > 0$ 成立? 若存在, 求出 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由. (2011 年高考数学陕西卷理科第21题)

3 第(Ⅲ)问的讲解

3.1 弄清条件是什么, 一共有几个, 其数学含义如何条件有2个, 均与(I)有关:

(1) 第(I)问的条件自然是第(Ⅲ)问的条件, 如 n 次多项式 $f_n(x) = x^n + x - 1 (n \geq 2)$, 这是一个连续函数等.

(2) 第(I)问的中间和最后结论也是第(Ⅲ)问的条件, 如 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增(不等式), 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内存在唯一的零点等. 特别是, $f_n(x)$ 在区

间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内的零点给出了一个数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. 这时, 零点的数学含义为一系列的等式 $f_n(x_n) = 0$:

$$f_2(x_2) = x_2^2 + x_2 - 1 = 0, x_2 \in (\frac{1}{2}, 1),$$

$$f_3(x_3) = x_3^3 + x_3 - 1 = 0, x_3 \in (\frac{1}{2}, 1),$$

.....

$$f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 = 0, x_n \in (\frac{1}{2}, 1),$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0, x_{n+1} \in (\frac{1}{2}, 1),$$

.....

3.2 弄清结论是什么, 一共有几个, 其数学含义如何
结论是一句话: 判断数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 的增减性. 这是一个需要探究的结论, 一般而言, 存在四种可能:

- (1) 单调递增(递增数列).
- (2) 单调递减(递减数列).
- (3) 时而增时而减(摆动数列).
- (4) 既不增也不减(常数列).

其中, 常数列不可能, 因为函数 $y_1 = x^n$ 当 $n=2, 3, \dots$ 时, 与函数 $y_2 = 1-x$ 的图象交点不会重合(参见9期文中图1), 所以问题的实质是找数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 中的不等关系.

3.3 弄清题目的条件与结论有哪些数学联系, 是一种什么样的结构

条件通过零点提供等式 $f_n(x_n) = 0 (n=2, 3, \dots)$, 同时也产生数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, 结论是判断数列的增减性, 在我们的眼前就出现这样一个数学结构: 由等式推导不等式. 本质上是条件不等式的证明.

(1) 特殊化探索数列是否有增减性.

难的不会想简单的. 考虑 x_2, x_3 , 有 $x_2, x_3 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 且满足等量关系

$$x_2^2 + x_2 - 1 = 0,$$

$$x_3^3 + x_3 - 1 = 0.$$

①几何直观思考. 作函数 $y = x^2, y = x^3$ 与 $y_2 = 1-x$ 的图象(9期文中图1), 由交点可以看到 $x_3 > x_2$. ($x_2 \approx 0.618, x_3 \approx 0.682$)

②代数抽象思考. 采用作差比较大小. 这时

$$x_2 = 1 - x_2^2,$$

$$x_3 = 1 - x_3^2,$$

$$\text{作差 } x_3 - x_2 = (1 - x_3^2) - (1 - x_2^2) = x_2^2 - x_3^2$$

$$> x_2^2 - x_3^2 \text{ (由 } \frac{1}{2} < x_3 < 1 \text{ 有 } x_3^3 < x_3^2 \text{)}$$

$$= (x_2 - x_3)(x_2 + x_3).$$

若 $x_3 = x_2$, 则 $0 = \text{左边} > \text{右边} = 0$, 矛盾; 若 $x_3 < x_2$, 则 $0 > \text{左边} > \text{右边} > 0$, 矛盾.

所以 $x_3 > x_2$.

由此, 我们不仅可以猜想数列是递增的, 而且还可以由 x_2, x_3 推广到 x_n, x_{n+1} (解法1).

说明1: 也可以由 $x_3 - x_2 = (1 - x_3^3) - (1 - x_2^2) = x_2^2 - x_3^3 > x_2^2 - x_3^2$, 或作商比较 $\frac{x_3}{x_2} = \frac{1 - x_3^3}{1 - x_2^2} > \frac{1 - x_3^2}{1 - x_2^2}$, 得出 $x_3 > x_2$ 的估计.

(2) 沟通条件与递增数列的联系.

可以有多种途径沟通题目条件与结论(递增数列)的数学联系. 如

①由等式到不等式的变形, 作差(商)比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小;(解法1)

②由函数值递增到自变量递增, $f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$;(解法2)

③说明 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, x_{n+1})$ 上的零点, 或 x_{n+1} 是 $f_{n+1}(x)$ 在 $(x_n, 1)$ 上的零点.(解法3、解法4)

3.4 第(III)问的基本解法

下面给出四个基本解法, 读者不难写出更多的解法.

解法1: 在(I)的条件下 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内唯一的零点($n=2, 3, \dots$), 有

$$f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 = 0, x_n \in (\frac{1}{2}, 1),$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0, x_{n+1} \in (\frac{1}{2}, 1),$$

由 $x_{n+1} \in (\frac{1}{2}, 1)$, 有 $x_{n+1}^{n+1} > x_{n+1}^n$, 得

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 > x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0,$$

$$\text{从而 } 0 < f_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)$$

$$= (x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1) - (x_n^n + x_n - 1)$$

$$= (x_{n+1}^n - x_n^n) + (x_{n+1} - x_n)$$

$$= (x_{n+1} - x_n) \left(\sum_{k=1}^n x_{n+1}^{n-k} x_n^{k-1} + 1 \right),$$

$$\text{但 } \sum_{k=1}^n x_{n+1}^{n-k} x_n^{k-1} + 1 > 0,$$

所以 $x_{n+1} > x_n (n=2, 3, \dots)$, 即数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 是递增数列.

说明2: 这个解法的主体工作与第(I)问解法2类似, 本质上都是说函数 $f_n(x)$ 单调递增. 不同只在于, 第(I)问由自变量增加说明函数值增加, 第(III)问反过来由函数值增加说明自变量增加. 既然第(I)

问已经解决了单调性,到第(Ⅲ)问就可以节约书写、直接用.

解法 2: 在 (I) 的条件下, x_n 是 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内唯一的零点 ($n=2, 3, \dots$), 有

$$f_n(x_n)=0, f_{n+1}(x_{n+1})=0, x_n, x_{n+1} \in (\frac{1}{2}, 1),$$

且 $x_{n+1}^{n+1} > x_n^{n+1}$,

有 $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 > x_n^{n+1} + x_{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$.

又因为 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上是增函数, 有

$$f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n) \Rightarrow x_{n+1} > x_n (n=2, 3, \dots),$$

得数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 是递增数列.

说明 3: 这两个解法的关键步骤都是得出 $f_n(x_{n+1}) > 0$, 抓住这个关键联想到第(I)问曾有 $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} < 0$, 所以在 $(\frac{1}{2}, x_{n+1})$ 上必定有零点 x_0 , 使 $f(x_0) = 0$, 但由唯一性知这个零点就是 x_n , 所以 $\frac{1}{2} < x_n < x_{n+1} (n=2, 3, \dots)$.

解法 3: 在 (I) 的条件下 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内唯一的零点 ($n=2, 3, \dots$), 有

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 > x_n^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0,$$

即 $f_n(x_{n+1}) > 0$, 又 $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} < 0$, 所以 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, x_{n+1})$ 上有唯一的零点 $x_n (f_n(x_n) = 0)$, 得 $x_n < x_{n+1} (n=2, 3, \dots)$, 即数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 是递增数列.

说明 4: 既然可以在 $(\frac{1}{2}, x_{n+1})$ 上推出 $x_n < x_{n+1}$, 当然就想到在 $(x_n, 1)$ 上推出 $x_n < x_{n+1}$, 一尝试, $f_n(1)$ 比 $f_n(\frac{1}{2})$ 书写更简单.

解法 4: 在 (I) 的条件下, x_n 是 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内唯一的零点 ($n=2, 3, \dots$), 由

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) f_{n+1}(1) &= (x_n^{n+1} + x_n - 1)(1^{n+1} + 1 - 1) \\ &= x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n + x_n - 1 = 0, \end{aligned}$$

知 $f_{n+1}(x)$ 在 $(x_n, 1)$ 内有唯一的零点

$x_{n+1} (f_{n+1}(x_{n+1}) = 0)$, 得 $x_n < x_{n+1} (n=2, 3, \dots)$, 即数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 是递增数列.

说明 5: 考试临场中, 第(Ⅲ)问可以有两个跳步解答, 其一是完成第(I)问后、跳过第(Ⅱ)问, 做第(Ⅲ)问; 其二是跳过第(I)、(Ⅱ)问, 把第(I)问的结论作条件, 做第(Ⅲ)问.

4 考查目标讲解

由上面的讲解可以看到, 本题可同时考查知识、思想和能力, 在 21.6 万理科考生中得分率(难度系数)为 0.2168 表明, 对考生的数学素养要求较高:

(1) 知识要求: 可以考查多项式、幂函数的导数, 利用函数性质判断方程解的存在, 用导数研究函数的单调性, 闭区间上二次函数的最值性质, 不等式恒成立, 数列增减性等有关知识.

(2) 思想要求: 可以考查函数与方程的数学思想、化归与转化的数学思想、分类与整合的数学思想、数形结合的数学思想等.

(3) 能力要求: 可以考查推理论证能力, 运算求解能力与数学探究能力.

参考文献:

- [1] 罗增儒. 数学新课程高考考什么、怎么考[J]. 中国数学教育, 2012(1/2): 70-73.
- [2] 本刊特约数学试题评阅组. 2011 年高考数学试题“红黑榜”[J]. 基础教育课程, 2011(9): 33-38.
- [3] 罗增儒. 2010 年高中数学联赛第 9 题的解法研讨与背景揭示[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2010(12): 41-45.

欢迎订阅《中学数学教学》

全国优秀科技期刊 中国期刊方阵双效期刊
邮发代号 26-7 全国各地邮局均可订阅

《中学数学教学》始终坚持质量第一, 坚持全心全意为推动教学改革, 为提高中学数学教学质量服务的办刊方针. 紧扣中学数学教学实际, 突出“新颖、实用、指导、资料”八字特色, 主要栏目有“聚焦新课程”“教学参考”“解题方法”“复习考试”“新题点评”“初数研究”“错在哪里”等, 内容详实, 印刷精美.

本刊为双月刊, 大 16 开 64 页, 每逢双月 15 日出版. 每期定价 6.5 元, 全年 39 元. 全国邮局(所)均可订阅, 也可直接向编辑部订购, 我们将竭诚为您服务.

编辑部地址: 合肥市金寨路 327 号合肥师范学院.

邮 编: 230061.

电 话: 0551-2836265L.

电子信箱: zsxhf@sina.com.