“方程的根与函数的零点”的教学

章建跃（人民教育出版社）

一、课标要求

本节内容，学生将学习利用函数的性质求方程的近似解，体会函数与方程的有机联系.

课标在必修模块1“函数概念与基本初等函数Ⅰ”中，对“函数与方程”提出如下要求.

① 结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系.

② 根据具体函数的图象，能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解，了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

从上述要求可见，课标只要求以具体函数（特别是二次函数）为载体，了解函数的零点与方程的根的联系；同时，课标强调了通过函数图象的直观，让学生了解有关原理和方法. 因此，课标引入本节课的内容，旨在让学生学习用函数的性质解决问题（用连续函数的性质判断方程在某一区间上是否有解），体会函数与方程之间的联系性，而在数学原理上没有过高要求.

二、关于教材的理解

本节内容有函数零点概念、函数零点与相应方程根的关系、函数零点存在性定理.

零点的概念出现在连续函数的性质——零点存在性命题之中，这个性质是为“用二分法求方程近似解”服务的. 课标安排“用二分法求方程的近似解”，目的是为反映方程与函数的联系，增加函数的“应用点”，体现函数应用的广泛性. 这部分教材内容的核心概念是函数，而“零点”只是附属于函数的一个小概念，不属于教学重点，所以不需加以细致的讨论（如“零点是一个点还是一个数”）.

函数的值为0，即$f(x)=0$，是关于x的方程，因而方程$f(x)=0$是否有解与函数$f(x)$是否存在零点是等价的. 这样，求方程的解可以转化为求函数的零点. 所以，函数零点存在性定理是“用二分法求方程近似解”的基础，因此是本课时的重点.

零点存在性定理是函数在某区间上存在零点的充分不必要条件. 如果函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上的图象是一条连续不断的曲线，并且满足$f(a)f(b)<0$，则函数$y=f(x)$在区间(a, b)内至少有一个零点，但零点的个数，需结合函数的单调性等性质进行判断. 定理的逆命题不成立. 教材通过图象直观讨论零点存在性定理，是因为高中不讲连续函数的概念，不可能以有关连续的定义来进行推理，而只能以依靠图象直观地讲道理. 因此，从学习这个命题的过程来说，零点的几何意义（即函数图象与x轴的交点）在认识命题中的作用要比零点是方程的实数根更重要. 从“形”到“数”，先认识零点的几何意义，后联系到实数根，是自然顺畅的认识过程. 对于定理中条件的“充分不必要”，也要通过图象直观加以解释.

另外，在建立方程与函数的联系的过程中，体现了“动”“静”转化的思想——“方程的根”是一个静态的点，等价转化为“函数的零点”，就与运动变化联系上了，从而为通过“二分”（实际上是“区间套”）把根所在的范围（区间）不断缩小，进而不断逼近方程的根，做好了准备.

教材从具体的二次函数入手，先建立二次函数的零点与相应二次方程的根的关系，然后将其推广到一般的函数与相应方程的根的关系. 这是一个从特殊到一般的过程，“关系”是归纳推理的结果. 这样做，一方面是为了落实课标意图，另一方面也是考虑到从学生的已有知识出发认识新知识.

零点存在性定理也采用类似的方法处理，即从具体的二次函数图象观察，从图象特征到代数表示：由这段曲线连续，且两个端点分别在x轴的两侧，可知$f(a)$和$f(b)$正负相反；又由曲线是连续的，可知连接两个端点的曲线必然要经过x轴，即曲线与x轴一定有公共点$(c, 0)$；由于曲线是函数$y=f(x)$的图象，所以一定有$f(c)=0(a<c<b)$. 于是有：如果函数$y=f(x)$的图象在区间$[a, b]$上连续不断，并且$f(a)f(b)<0$，则存在$c\in(a, b)$，使得$f(c)=0$. 以它为基础可以进一步证明连续函数的其他性质（如介值定理等）. 虽然这一定理从几何上看非常直观、明确、易懂，但严格证明却不简单，需要用到实数理论中的区间套定理和函数连续的定义才能完成. 所以，教材借助函数图象，通过几何直观和归纳推理，得到连续函数零点的存在性定理，是充分考虑到学生的认知水平和知识基础的.

三、关于教学目标

我们曾经在许多场合讨论过“课程目标”和“课堂教学目标”的关系. 数学教育的“目标域”可以表示为一个从抽象到具体的连续体，我们可以把这个连续体区分为三个层次的目标.

课程目标——宏观目标，是需要付出大量的时间和精力，经过长期努力才能实现的学习结果，这类目标通常包含着多方面的、更为具体的目标. 目前，我国课程标准都采用了“三维目标”的方式来呈现. 例如，“发展自主发现、探究实践的能力”，“提高灵活应用知识的能力”，“体验化归与转化、数形结合、函数与方程这三大数学思想在解决数学问题时的意义与价值”，“培养锲而不舍的探索精神和严密思考的良好学习习惯，感受学习、探索发现的乐趣与成功感”等，都是课程目标的例子.

单元目标——中观目标，用于计划需要几周或几个月的时间学习的单元，是课程目标的具体化. 例如，“学生能利用函数的性质求方程的近似解”，“能解释函数与方程的联系”都是一个单元目标，是“学生能用函数的思想方法解决问题”的具体

化. 它们描述了一种学生行为和该行为所针对的内容主题.

教学目标——微观目标，即课堂教学目标. 这一层次的目标专注于具体内容的学习，只处理细节，它们在计划日常教学中发挥作用. 例如，本节课的教学目标可以确定为：

(1) 学生能针对具体方程（如二次方程），说明方程的根、相应函数图象与 x 轴的交点以及相应函数零点的关系；

(2) 学生能借助具体函数的图象，解释“函数零点存在性定理”的条件是充分而不必要条件；

(3) 学生能利用函数图象和性质判断某些函数的零点个数（可使用计算器）；

(4) 学生能将一个方程求解问题转化为一个函数零点问题，并会判断存在零点的区间.

当前，在制定课堂教学目标时，混淆目标的三个层次的现象很普遍，需要引起广大教师和教研员的高度重视.

四、关于教学难点

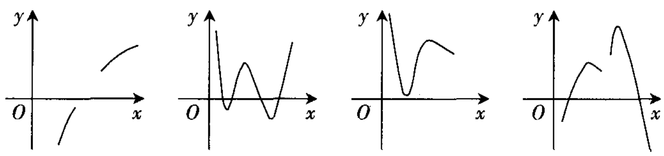
在“义务教育课标”中，有“体会一次函数与二元一次方程的关系”“会利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解”等要求. 在一次函数、二次函数的学习中，通过解答“当函数值为0时，求相应自变量的值”的问题，初步认识了方程与函数的联系，知道求一次函数 $y=ax+b$ 图象与 x 轴的交点的实质就是解方程 $ax+b=0$；对二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴是否相交和方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的解的关系，也有一些直观认识. 进入高中后，已经学习了函数概念与性质，指数函数、对数函数和幂函数的图象与性质. 这些都为学生认识函数与方程的联系奠定了基础.

实际上，函数的零点这个概念，就是初中所学的“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根就是相应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标”的直接推广. 新、旧知识之间只有一层很薄的窗户纸，一捅就破. 学生只要以二次方程和二次函数的联系为载体，经历从特殊到一般化的过程，就可以理解函数零点概念. 因此，函数的零点概念不是难点.

前已指出，连续函数零点存在性定理是借助具体的二次函数图象观察，从图象特征到代数表示，归纳而得的结果. 虽然在“捅破窗户纸”后，定理是直观、明确而易懂的，但如果我们希望学生自己来捅这张“窗户纸”的话，则有一定的困难——主要是他们可能“想不到”：当函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的曲线时，连接两个端点的曲线经过 x 轴（次数不限），即曲线与 x 轴一定有公共点（个数不限），可以用 $f(a)\cdot f(b)<0$ 来表示. 因此，在学习连续函数零点存在性定理过程中，把“图象特征”转化为“代数表示”是真正的难点所在. 化解这一难点，需要通过典型实例（可以让学生举出一些例子）的观察，概括出共同特征——连续不断的曲线段经过 x 轴时，两个端点的纵坐标一定异号.

由于学生非常熟悉用判别式判断一元二次方程的根的情况，因此他们的另一个“想不到”可能是“借助二次函数的图象和性质来判断一元二次方程根的存在性及根的个数”. 也就是说，将方程的问题转化为函数的问题也是难点之一，因为它需要有联系的观点，也不是学生自然能想到的. 化解的方法是找一个用“判别式”判断时，数字运算很繁琐，但用二次函数图象很容易说明根的存在性的一元二次方程，“迫使”学生把思路转变到“用二次函数图象来判断”上来. 在此基础上，再引导学生发现，借助函数图象与性质判断方程根的存在性具有一般意义，从而为引出连续函数零点存在性定理做好铺垫.

另外，由于“二次函数图象”比较简单，推广得到定理后，所形成的思维定势，对定理条件的“充分而不必要性”的认识会产生负迁移. 化解这一负迁移，可以借助“反例”，如下图.



认知心理学认为，反例为辨析概念提供了最好的载体，在连续函数零点存在性定理的教学中，使用反例是加深理解定理的策略之一.

五、关于信息技术的使用

本课的内容的学习，函数图象是主要载体. 为了使学生全面认识本课内容，除了二次函数图象外，应注意使用超越函数的图象和一般抽象函数的图象. 因此，本节课的教学，需要借助计算机或者计算器绘制函数图象，通过观察图象加深理解本课知识；判断零点所在区间的过程中，也要作函数图象，并要计算函数值，必须借助计算机或计算器以提高效率.

六、关于课题的引入

1. 教科书的思路

教科书按照如下思路展开：

首先，从宏观上提出“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象有什么关系？”

接着，采取“从特殊到一般”的过程，先讨论三个具体的一元二次方程的根与对应的二次函数图象与 x 轴交点的横坐标的关系，再借助判别式讨论抽象的一元二次方程的根与对应的二次函数图象与 x 轴交点的横坐标的关系.

最后，给出函数零点概念后，将上述结论直接推广到一般情形，并指出：“一般地，对于不能用公式法求根的方程 $f(x)=0$ 来说，我们可以把它与函数 $y=f(x)$ 联系起来，并利用函数的性质找出函数的零点，从而求出方程的根.”

由于初中阶段对二次函数与一元二次方程的关系没有进行过系统讨论，因此上述做法带有“复习整理已有知识，为新知识引入做好准备”的味道. 在本课的教学中，到底采取什么方式复习已有知识，并把“借助二次函数的图象讨论一元二次方程的根”的意图贯穿其中，应该根据学生的具体情况而定.

2. 对几种引入方式的分析

本节课的课题如何引入，是一个需要仔细思量的问题. 实践中也存在一些不同处理方法. 除了照搬书本的处理方法外，还有一些别的处理方法. 例如：

(1) 问：方程 $x^2-2x-3=0$ 是否有实根？你是怎样判断的？

(2) 复习总结一元二次方程与相应函数与 x 轴的交点及其坐标的关系：

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程根的个数			
图象与 x 轴交点个数			
图象与 x 轴交点坐标			

再问：上述结论对其他函数成立吗？为什么？

(3) 把教材后面的问题搬到前面，问：方程 $\ln x+2x-6=0$ 是否有实根？为什么？

(4) 方程 $3\,567x^2-3\,569x+1=0$ 有实数根吗？为什么？

上述方法（1），因为方程过于简单，很容易得出根的具体值，对于问题的“深意”自然不会再追究，因此大多数学生可能都不感兴趣. 方法（2），因为直接点出了一元二次方程与二次函数的联系，等于教师代替学生把方程求解问题转化为函数问题，失去了一次知识联系性的思维训练机会. 方法（3）与后续的通过将一元二次方程的根与二次函数的零点的关系推广而得到一般的结论有脱节. 因此这几种方法都有一定的缺陷.

已有的实践表明，方法(4)的问题，首先避免了学生用因式分解的方法求方程的根的企图. 许多学生根据自己的经验，先想到了用判别式来判断，但发现数字计算很繁，于是放弃并回头看题目的要求，注意到题目是要判断“有没有”根，并不需要具体求出根，因此他们不再机械地计算 Δ，而是设法通过其他途径来解决. 细心的学生发现了方程的系数的特点，由此联系二次函数 $y=3\,567x^2-3\,569x+1$ 的图象作出判断就水到渠成了. 然后，教师再给出函数零点的概念，并推广得出“方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $=0\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 有零点”的结论，这样的过程学生感到很自然.

七、关于“连续函数零点存在性定理”的概括过程

1. 教科书的思路

教科书首先用“探究”栏目直接提出问题：计算 $f(-2)$ 和 $f(1)$ 的乘积、以及 $f(2)$ 和 $f(4)$ 的乘积，发现都为负数；然后再提出“任意画几个图象，观察图象，看看是否能得出同样的结果”的任务；最后给出定理. 这一思路就是一个从最熟悉的二次函数图象出发，得出结论后，让学生自己再举一些实例验证，最后推广，归纳出连续函数零点存在性定理.

2. 课堂中如何构建定理的概括过程

前已指出，教学难点是如何引导学生把“函数 $f(x)$ 的图象在区间 (a,b) 内经过 x 轴”转化为 $f(a)f(b)<0$，这也是教学的重点. 我们可以通过下列步骤来启发学生：

(1) 我们发现，函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-2,1]$ 和区间 $[2,4]$ 内各有一个零点. 在这两个区间内，函数图象有什么共同点？函数值的变化有什么共同点？

希望学生得出：函数图象的共同点是“经过 x 轴”，函数值的变化的共同点是“在零点左右两侧，函数值异号”.

(2) 如果二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在区间 $[m,n]$ 内有一个零点，那么在区间 $[m,n]$ 内，它的函数值有什么变化规律？

希望学生得出：将(1)的结论推广到一般. 这里，在零点的左右两侧，函数值“左正右负”或“左负右正”，共同点是“异号”. 特别地，$f(m)f(n)<0$.

(3) 对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，如果有 $f(m)f(n)<0$（其中 $m<n$），那么，它在区间 $[m,n]$ 内一定有零点吗？为什么？

这是问题(2)的逆. 希望学生得出：由于二次函数的图象是连续不断的，因此结论是肯定的.

(4) 一般地，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上有 $f(a)f(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一定存在零点吗？请举例说明.

这里强调“举例说明”，希望学生能举出反例.

(5) 那么，在(4)的条件下，再添加什么条件就可以保证函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一定存在零点？

希望学生与二次函数作比较，发现两者的差异在于是否能保证“函数图象连续不断”，由此添加这一条件，得出定理.

3. 关于定理的辨析

定理的辨析主要针对条件的“充分而不必要”进行. 主要通过画抽象的函数图象的方式举反例. 具体方式在前面难点分析时已经给出，这里不再赘述.

4. 关于“零点的个数”

首先，要明确“零点的个数”是一个“枝节问题”，不要费太多的时间. 只要让学生在直观上认识到，在定理的条件下，一定能保证零点存在，“有多少个”并不是定理所关心的问题.

其次，课本中的例 1，求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点个数，意在用信息技术作函数值对应表和函数图象，通过直观判断得出结论. 当然，这一问题用函数的单调性概念也是不难证明的. 值得注意的是，本题有的老师提倡用函数 $f(x)=\ln x$ 与 $f(x)=2x-6$ 的交点得出零点. 但这个方法不是通法，不应该提倡.

八、小结

1. 本课中的几个新知识（函数的零点、方程的根与函数零点的关系、连续函数零点存在性定理），都具有“形”与“数”两方面的含义，可以从不同角度加以认识，教学时应充分利用好函数图象，努力体现数形结合思想.

2. 函数的零点不是一个核心概念；在建立函数的零点与方程的根的联系中体现的函数思想，以及连续函数零点存在性定理是本课时的重点. 教学时，应把重点放在函数与方程的联系上，对“函数的零点是点还是数”、“函数零点的个数”等一些细枝末节上不要过分纠缠.

3. 从认知过程看，学生对本课时的知识要经历一个从“形”到“数”的认识过程，几何直观是理性认识的基础. 在这个过程中，“用函数观点看方程”、“从函数图象特征到代数表示”是一件“不是做不到，而是想不到”的事情，原因是函数观念还不牢固，函数的思想方法应用还不能达到自觉状态. 因此教学中要注意利用好二次函数的图象，在零点的左右两侧“函数图象的变化规律”与“函数值的变化规律”的关系的认识上加强引导.

4. 教学中，为学生构建一个从具体到抽象的过程，让学生在具体例子中概括出共同本质特征是关键. 具体而言，就是要经历两次概括：一次是从具体的二次函数的共同特征中概括出二次函数的零点与一元二次方程的根的关系，以及二次函数零点存在性定理；第二次是把二次函数的结论推广到一般函数中去，推广过程中要注意通过类比发现充分条件.

5. 本课时的学习应该加强信息技术的使用，特别是用信息技术画函数图象.