抽象函数与初等函数的微妙解法

◇ 宋国清

抽象函数问题是学生学习中的一个难点，也是各种考试测评的热点问题之一。研究发现，由抽象函数结构、性质，联想已学过的基本函数，再由基本函数的相关结论，预测、猜想抽象函数可能有的相关结论，是使抽象函数问题获解的一种有效方法。所谓抽象函数，是指没有明确给出函数表达式，只给出它具有的某些特征或性质，并用一种符号表示的函数。由抽象函数构成的数学问题叫抽象函数问题，这类问题是学生学习中的一个难点，也是各种考试测评的热点问题之一。研究抽象函数问题的解法，对教师的教学，学生深刻理解并牢固掌握函数的相关内容，学好大纲规定的基本函数知识显得尤为重要。抽象来源于具体。抽象函数是由特殊的、具体的函数抽象而得到的。如f(x)=kx(k≠0)有f(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)可抽象为f(x+y)=f(x)+f(y)。那么y=kx就叫做抽象函数f(x)满足f(x+y)=f(x)+f(y)的“原型”(初等函数函数)，分析抽象函数问题的解题过程及心理变化规律可知，一般均是由抽象函数的结构，联想到已学过的具有相同或相似结构的某类(基本)“原型”函数，并由“原型”函数的相关结论，预测、猜想抽象函数可能具有的某种性质使问题获解的，称这种解抽象函数问题的方法为“原型”解法。下面给出中学阶段常用的“原型”(初等函数函数)并举例说明“原型”解法。

一、中学阶段常用抽象函数f(x)的“原型”(初等函数函数)

1、$f(x+y)=f(x)+f(y)$——$y=kx$（k为常数）

2、$f(x+y)=f(x)f(y)$——$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）

3、$f(xy)=f(x)+f(y)$——$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）

4、$f(xy)=f(x)f(y)$——$y=x^n$（n为常数）

5、$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$或$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$——$y=\cos\omega x$（$\omega$为常数）

6、$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$——$y=\tan x$

二、“原型”解法例析

设函数f(x)满足$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$，且$f(\frac{\pi}{2})=0$，$x$、$y\in R$；求证：f(x)为周期函数，并指出它的一个周期。

分析与简证：由$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$

想：$\cos x_1+\cos x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$

原型：y=cosx，为周期函数且2π为它的一个周期。猜测：f(x)为周期函数，2π为它的一个周期

令$x_1=x+\pi$，$x_2=\pi$ 则$f(x+\pi)+f(x)=2f(x+\frac{\pi}{2})f(\frac{\pi}{2})=0$

$\therefore f(x+\pi)=-f(x)\Rightarrow f(x+2\pi)=f(x)$

新课标下初中数学作业优化设计调查统计表

题号	年级	A	B	C	D	E
1	初一	12	37	4	0	
	初二	23	52	22	8	
	初三	13	32	4	0	
	合计	48	121	30	8	
2	初一	48	6	0	0	
	初二	26	33	17	1	
	初三	37	9	3	6	
	合计	111	48	20	7	
3	初一	11	43	1	0	
	初二	18	73	13	1	
	初三	8	33	8	0	
	合计	37	149	22	1	
4	初一	0	26	25	0	
	初二	9	75	16	8	
	初三	8	38	3	0	
	合计	17	139	44	8	
5	初一	1	29	12	10	
	初二	4	42	25	33	
	初三	0	18	6	22	
	合计	5	89	43	65	
6	初一	27	21	3		
	初二	27	61	13		
	初三	14	34	2		
	合计	68	116	18		
7	初一	4	39	4	2	0
	初二	13	61	12	8	5
	初三	5	33	6	0	2
	合计	22	133	22	10	7
8	初一	23	25	4	0	
	初二	22	64	10	9	
	初三	8	37	5	0	
	合计	53	126	19	9	
9	初一	0	8	21	24	
	初二	2	13	58	31	
	初三	5	16	21	6	
	合计	7	37	100	61	
10	初一	6	44	7		
	初二	9	47	46		
	初三	4	16	30		
	合计	19	107	83		
11	初一	20	25	6		
	初二	19	44	31		
	初三	9	25	18		
	合计	48	94	55	61	
13 前	初一	9	3	6	30	5
	初二	35	9	10	45	5
	初三	7	5	4	24	7
	合计	51	17	20	99	17
13 后	初一	8	24	9	0	11
	初二	13	71	9	2	14
	初三	7	19	10	5	11
	合计	28	114	28	7	36

参考文献：

[1]《教育科研指南》红旗出版社. 1999年北京. 何云山、龚春燕主编.

[2]《教育科学研究概论》石油出版社. 2001年6月. 魏龙渝主编.

[3]戴忠财《优化课堂练习 提高教学效率》.《科学咨询》. 2009年3月第6期(总第174期).

(作者单位：重庆市武隆县平桥中学校课题研究组)

∴ 为周期函数且2π是它的一个周期。

[例2] 已知函数f(x)满足 $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，若f(0)=2004，试求f(2005)。

分析与略解：由 $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

想：$\tan(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

原型：y=tanx为周期函数且周期为 $4\times\frac{\pi}{4}=\pi$。

猜测：f(x)为周期函数且周期为4×1=4

$$\because f(x+2)=f[(x+1)+1]=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$\therefore f(x+4)=f[(x+2)+2]=\frac{1}{f(x+2)}=f(x)\Rightarrow f(x+4)=f(x)$$

∴ 是以4为周期的周期函数

又∵f(2)=2004

$$\therefore f(2005)=f(2004+1)=\frac{1+f(2004)}{1-f(2004)}=\frac{1+f(0)}{1-f(0)}=\frac{1+2004}{1-2004}=-\frac{2005}{2003}$$

$\therefore f(2005)=-\frac{2005}{2003}$

[例3] 已知函数f(x)对于任意实数x、y都有f(x+y)=f(x)+f(y)，且当x＞0时，f(x)＞0，f(-1)=-2，求函数f(x)在区间[-2，1]上的值域。

分析与略解：由：f(x+y)=f(x)+f(y)

想：k(x+y)=kx+ky

原型：y＝kx(k为常数)为奇函数。k＜0时为减函数，k＞0时为增函数。

猜测：f(x)为奇函数且f(x)为R上的单调增函数，且f(x)在[-2,1]上有f(x)∈[-4,2]

设 $x_1<x_2$且x_1，$x_2\in R$ 则$x_2-x_1>0$ ∴$f(x_2-x_1)>0$

∴$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)>0$ ∴$f(x_2)>f(x_1)$，∴f(x)为R上的单调增函数。

令x=y=0，则f(0)=0，令y=－x，则f(－x)=－f(x)

∴f(x)为R上的奇函数。∴ f(-1)=-f(1)=-2 ∴f(1)=2，f(-2)=2f(-1)=-4 ∴-4≤f(x)≤2(x∈[-2,1])

故f(x)在[-2,1]上的值域为[-4，2]

[例4] 已知函数f(x)对于一切实数x、y满足f(0)≠0，f(x+y)=f(x)f(y)，且当x<0时，f(x)＞1

(1)当x＞0时，求f(x)的取值范围。(2)判断f(x)在R上的单调性

分析与略解：由：f(x+y)=f(x)f(y)

想：$a^{x+y}=a^xa^y$

原型：$y=a^x(a>0,a\neq1)$，$a^0=1\neq0$。当a＞1时为单调增函数，且x＞0时，y＞1，x＜0时，0＜y＜1;0＜a＜1时为单调减函数，且x＜0时，y＞1，x＞0时，0＜y＜1。

猜测：f(x)为减函数，且当x＞0时，0＜f(x)＜1。

(1) 对于一切x、y∈R，$f(x+y)=f(x)f(y)$且$f(0)\neq0$

令x=y=0，则f(0)=1，现设x＞0，则-x＜0，∴f(-x)＞1

又 $f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)=1$ ∴$f(-x)=\frac{1}{f(x)}>1$

∴$0<f(x)<1$

(2) 设$x_1<x_2$，x_1、$x_2\in R$，则$x_1-x_2<0$，$f(x_1-x_2)>1$且

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1-x_2+x_2)}{f(x_2)}=\frac{f(x_1-x_2)f(x_2)}{f(x_2)}=f(x_1-x_2)>1$$

∴ $f(x_1)>f(x_2)$，∴f(x)在R上为单调减函数

[例5] 已知函数f(x)定义域为(0,+∞)且单调递增，满足f(4)=1，f(xy)=f(x)+f(y)

(1)证明：f(1)=0；(2)求f(16)；(3)若f(x)+f(x-3)≤1，求x的范围；(4)试证$f(x^n)=nf(x)$(n∈N)

分析与略解：由：f(xf)=f(x)+f(y)

想：$\log_a x=\log_a x+\log_a y$(x、y∈$R^+$)

原型：$y=\log_a x$(a＞0，a≠0)

猜测：f(x)有f(1)=0，f(16)=2，……

(1) 令x=1，y=4，则 $f(4)=f(1\times4)=f(1)+f(4)$ ∴ $f(1)=0$

(2) $f(16)=f(4\times4)=f(4)+f(4)=2$

(3) $f(x)+f(x-3)=f[x(x-3)]\le1=f(4)$

$f(x)$在(0，+∞)上单调递增

$$\therefore\begin{cases}x(x-3)\le4\\x-3>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le4\\x>3\end{cases}\Rightarrow3<x\le4$$

∴ x∈(3，4]

(4) ∵ $f(xy)=f(x)+f(y)$

$$\therefore f(x^n)=f(\underbrace{x\bullet x\bullet x\bullet\cdots\bullet x}_{n个})=nf(x)$$

[例6] 已知函数f(x)对于一切正实数x、y都有f(xy)=f(x)f(y)且x＞1时，$f(x)<1$，$f(2)=\frac{1}{9}$

(1)求证：f(x)＞0；(2)求证：$f(x^{-1})=[f(x)^{-1}]$

(3)求证：在(0，+∞)上为单调减函数

(4)若f(m)=9，试求m的值。

分析与简证：由f(xy)=f(x)f(y)，

想：$(x_1x_2)^n=x_1^nx_2^n$

原型：$y=x^n$(n为常数($y=x^2$)

猜测：f(x)＞0，在(0，+∞)上为单调减函数，……

(1)对任意$x>0$，$f(x)=f(\sqrt{x}\bullet\sqrt{x}))=[f(\sqrt{x})]^2\geqslant0$

假设存在y＞0，使f(y)=0，则对任意x＞0

$f(x)=f(f(\frac{x}{y}\bullet y)=f(\frac{x}{y})f(y)=0$，这与已知矛盾

故对任意$x>0$，均有$f(x)>0$

(2) ∵ $f(x)=f(x\times1)=f(x)f(1)$，$f(x)>0$，∴ $f(1)=1$

∴ $f(x)f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{x}\cdot x)=f(1)=1$ ∴ $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$

(3) x_1、$x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，则$\frac{x_2}{x_1}>1$，∴ $f(\frac{x_2}{x_1})<1$，

∴ $f(x_2)=f(\frac{x_2}{x_1}\bullet x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})f(x_1)<f(x_1)$ 即 $f(x_2)<f(x_1)$

∴ 在(0，+∞)上为单调减函数。

(4) ∵ $f(2)=\frac{1}{9}$，$f(m)=9$ ∴ $f(2)f(m)=1$

∴ $f(2m)=1=f(1)$，而$f(x)$在(0，+∞)是单调减函数

∴$2m=1$ 即 $m=\frac{1}{2}$

综上所述，由抽象函数问题的结构特征，联想已学过的具有相同或相似结构的基本(初等函数)函数，并由基本函数的相关结构，预测、猜想抽象函数可能具有的性质“抽象——具体——抽象”的“原型”联想思维方式，可使抽象函数问题顺利获解，且进一步说明，学生学好大纲规定的几种基本函数相关知识的重要性。

(作者单位：重庆市云阳中学)