

常微分方程与初等函数

魏明彬

(四川教育学院 数学系, 成都 611130) *

摘 要: 中学数学教学中如何应用高等数学, 一直是困扰中学数学教师的一个问题。我们对此作了一些探讨, 阐述了常微分方程在中学教学中的一些应用。

关键词: 微分方程; 初等函数; 特征

doi:10.3969/j.issn.1000-5757.2012.05.111

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1000-5757(2012)05-0111-02

四川教育学院数学系成人数学本科学员绝大部分是中学数学教师, 专科毕业后进入中学教书, 几年甚至十几年之后又来读本科, 因此, 高等数学中的许多基础知识已经忘记, 普遍基础较差。同时, 许多同学又认为, 中学数学教学中用不上高等数学, 因此, 学习积极性不高。这两方面的因素极大地影响了我们的教学。为了改变这种状况, 我们作了多方面的努力, 在常微分方程的教学中, 我们着重介绍了它在初等数学中的应用, 极大地提高了同学们的学习积极性, 收到了良好的效果。下面, 我们就来看看如何利用常微分方程来确定我们熟知的初等函数的本质特征。

引理1 设 $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$, 都有

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (1)$$

且 $f'(1) \neq 0$, $f(x) \neq C$, 则 $f(x)$ 必为幂函数^[1]。

证明: 由(1), $f(1) = f^2(1)$, $f(1) = 0$ 或 1 。由 $f(x) \neq C$ 及(1)知, $f(1) = 1$ 。由导数定义^[2]可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(x)f(y) - f(x)}{xy - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(x)[f(y) - f(1)]}{x(y - 1)} = \frac{f(x)f'(1)}{x} \end{aligned}$$

这是变量可分离方程^[3], 由(1)可知, $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$, 都有 $f(x) \neq 0$ 。变形得

$$\frac{df(x)}{f(x)} = f'(1) \frac{dx}{x}$$

解得 $f(x) = Cx^{f'(1)}$, 由 $f(1) = 1$ 得 $C = 1$, 令 $f'(1) = a$, 即得 $f(x) = x^a$ 为幂函数。

由此引理, 可得幂函数的一个充要条件

定理1 函数 $f(x)$ 为幂函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质:

$\forall x, y \in \mathbf{R}^+$, 都有 $f(xy) = f(x)f(y)$ (1), 且 $f'(1) \neq 0$, $f(x) \neq C$ 。

证明: 必要性。幂函数 $f(x) = x^a$ 显然具有性质(1)。

充分性。由引理1可得。

对于幂函数, 我们大家是很熟悉的, 也知道它具有性质(1), 但是, 具有性质(1)的函数是否一定是幂函数, 许多人就不清楚了, 或者说, 在初等数学中难以证明。而我们现在应用很少一点高等数学的知识, 就简单地证明了这一点。定理1说明, 公式(1)反映了幂函数的本质特征, 即一个函数当且仅当它具有性质(1)时, 该函数为幂函数。

引理2 设 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 都有

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

且 $f'(0) \neq 0$, $f(x) \neq C$, 则 $f(x)$ 必为指数函数。

证明: 由(1), $f(0) = f^2(0)$, $f(0) = 0$ 或 1 。由 $f(x) \neq C$ 及(2)知, $f(0) = 1$ 。

* 收稿日期: 2011-12-14

作者简介: 魏明彬(1956—), 男, 四川成都人, 副教授, 硕士, 研究方向: 动力系统和生物数学的研究。

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)f(y) - f(x)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)[f(y) - 1]}{y} \\
 &= f(x) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f(x)f'(0).
 \end{aligned}$$

这是变量可分离方程,由(2)可知, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \neq 0$ 。变形得

$$\frac{df(x)}{f(x)} = f'(0)dx$$

解得 $f(x) = Ce^{f'(0)x}$, 由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$, 令 $e^{f'(0)} = a$, 即得 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 为指数函数。

定理2 函数 $f(x)$ 为指数函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \text{ 都有 } f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

且 $f'(0) \neq 0, f(x) \neq C$ 。

证明:必要性。指数函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 显然具有性质(2)。

充分性。由引理2可得。

定理2说明,公式(2)反映了指数函数的本质特征,即一个函数当且仅当它具有性质(2)时,该函数为指数函数。

引理3 设 $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$, 都有

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3)$$

且 $f'(1) \neq 0$, 则 $f(x)$ 必为对数函数。

证明:由(3)易知, $f(1) = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{xy - x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y) - f(1)}{x(y - 1)} = \frac{f'(1)}{x},
 \end{aligned}$$

这是变量可分离方程,解得 $f(x) = f'(1)\ln x + C$, 由 $f(1) = 0$ 得 $C = 0$, 令 $f'(1) = \frac{1}{\ln a}$, ($a > 0, a \neq 1$), 即得 $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 为对数函数。

定理3 函数 $f(x)$ 为对数函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^+, \text{ 都有 } f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3)$$

且 $f'(1) \neq 0$ 。

证明:必要性。对数函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 显然具有性质(3)。

充分性。由引理3可得。

定理3说明,公式(3)反映了指数函数的本质特征,即一个函数当且仅当它具有性质(3)时,该函数为指数函数。

引理4 设 $\forall x, y \in \mathbf{R}, x, y, x+y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$,

其中 k 为任意整数,当 $f(x)f(y) \neq 1$ 时,都有

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \quad (4)$$

且 $f'(0) = 1$, 则 $f(x)$ 必为正切函数。

证明:在(4)中令 $x = y = 0$ 得 $f(0) = \frac{2f(0)}{1 - f^2(0)}$, 易知, $f(0) = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} - f(x)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{[f^2(x) + 1]f(y)}{[1 - f(x)f(y)]y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + 1}{1 - f(x)f(y)} \cdot \frac{f(y) - f(0)}{y}, \\
 &= f'(0)[f^2(x) + 1] = f^2(x) + 1.
 \end{aligned}$$

这是变量可分离方程,解得 $\arctan[f(x)] = x + C$, 由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $f(x) = \tan x$ 为正切函数。

定理4 函数 $f(x)$ 为正切函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质:

$\forall x, y \in \mathbf{R}, x, y, x+y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 为任意整数,当 $f(x)f(y) \neq 1$ 时,都有

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \quad (4)$$

且 $f'(0) = 1$ 。

证明:正切函数 $f(x) = \tan x$ 显然具有性质(4)。

充分性。由引理4可得。

定理4说明,公式(4)反映了正切函数的本质特征,即一个函数当且仅当它具有性质(4)时,该函数为正切函数。

(下转第124页)

[4] 马继福,胡静,江纯初. 普通物理学学习指导书(第一

分册:力学)[M]. 北京:高等教育出版社,1987:;205.

ON VIBRATION NATURE OF MEDIUM ELEMENT OF HARMONIC WAVE

XIANG Qun

(Polytechnic Institute Branch, Jinhua College of Education, Jinhua Zhejiang 321000, China)

Abstract: An analysis is made on elastic medium element in the process of harmonic wave on three physical quantities such as force, mechanical energy and vibration characteristics from the perspective of dynamics and kinematics, indicating the nature of vibration is not a harmonic vibration, but a forced vibration.

Key words: harmonic wave; harmonic vibration; forced vibration

(责任编辑:刘春林 责任校对:林子)

(上接第112页)

正切函数有许多诱导公式, $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ (4)'只是其中之一。在初等数学范围内,我们难以想到(4)'居然反映了正切函数的本质特征,更不用说证明它了。而仅仅使用一点简单的微分方程的知识,我们就证明了这个事实。

由以上四个定理我们看到,通过求解最简单的常微分方程,我们对四类基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数及三角函数)的本质特征或充要

条件有了更深刻的理解。进一步,我们还可以考虑,能不能通过求解常微分方程,确定其他的三角函数的本质特征。

参考文献:

- [1] 刘玉琏等. 数学分析讲义(第五版)[M]. 北京:高等教育出版社,2008:36.
- [2] 欧阳光中,姚允龙,周渊. 数学分析[M]. 上海:复旦大学出版社,2004:118.
- [3] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2005:9.

Ordinary Differential Equations and Elementary Functions

WEI Ming-bin

(Department of Mathematics, Sichuan College of Education, Chengdu 611130, China)

Abstract: How applying higher mathematics to elementary mathematics is a question of puzzling for middle school mathematics teachers. This paper discusses application of ordinary differential equations in elementary mathematics.

Key words: differential equations; elementary function; feature

(责任编辑:刘春林 责任校对:林子)

(上接第118页)

- [14] 乔玉英,王丽丽,焦红兵. 实 Clifford 分析中的拟 Bochner - Martinelli 型高阶奇异积分[J]. 数学物理学报,2005,25A(3): 289 - 298.

High Order Singular Integrals in Quaternion Analysis

YAN Sheng-yong

(Department of Mathematics, Sichuan College of Education, Chengdu 611130, China)

Abstract: By using the Hadamard's idea for principal value of high order singular integrals, this paper explores the induction definition for five kinds quasi Bochner - Martinelli type high order singular integrals in Quaternion analysis, and discusses recurrence formula, computation formula, and differential formula of the Hadamard principal value for them. The Hölder continuity for them and their differentiations are all obtained.

Key words: quaternion analysis; high order singular integral; hadamard principal value; Hölder continuity

(责任编辑:刘春林 责任校对:林子)