文章编号：1008-8717（2011）12-0127-02

分段函数的可导性问题分析

胡 国 专
（淮阴工学院数理学院，江苏 淮安 223003）

摘 要：本文对分段函数就分段点与非分段点两种情形探讨其可导性，重点讨论分段点的可导性，通过求相关初等函数导数的函数值或其极限的方法来简化分段函数可导性的判别与计算，用实例验证所用方法的便捷与高效，并指出此方法的局限性与处理办法。最后进一步给出有关分段函数可导性的几个实用的推论。

关键词：分段函数；分段点；初等函数；连续性；可导性

中图分类号：G642 **文献标识码**：A

分段函数作为一类比较特殊的函数，其可导性是微分学的一个重要内容，可导性的讨论与应用可解决大学数学中许多相关问题，有较高的研究价值。

由函数连续性与可导性的关系知，连续是可导的必要条件，如函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 必不可导。为此本文主要讨论分段函数在连续点处的导数，并以只有一个分段点的分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ A & x=x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$ 为代表来说明问题，其它情形可看成是该分段函数的组合或其特殊形式。

一、分段函数在非分段点处的可导性判别

对分段函数的非分段点，可据函数在各段开区间内的情况，利用初等函数的可导性判别方法判别其是否可导，同时可按初等函数求导法则，分别求出它在各开区间内的导数。如分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ A & x=x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$ 以 $x<x_0$ 段为例，设当 $x<x_0$ 时，$f(x)=g(x)$ 为初等函数，据假定此时 $g(x)$ 连续，用求导公式与法则求得 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$，$g'(x)$ 的自然定义域为 D，则函数 $f(x)$ 在 $\{x\,|\,x<x_0\}\cap D$ 内可导，$g'(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x<x_0$ 段的导数。

二、分段函数在分段点处的可导性判别

定理 1：设分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ A & x=x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$

如果函数 $f(x)$ 满足：

（1）在点 x_0 处连续；

（2）在点 x_0 的某空心邻域内可导；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)=B$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)=C$；

则 $f'_-(x_0)=B$，$f'_+(x_0)=C$。

证明：在点 x_0 的左邻域内，当 $x<x_0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[x,x_0]$ 上满足拉格朗日中值定理，则存在一点 $\xi\in(x,x_0)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

即 $g'(\xi)=\dfrac{g(x)-A}{x-x_0}$；当 $x\to x_0^-$ 时，有 $\xi\to x_0^-$，因此

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-A}{x-x_0}$$

$$=\lim_{\xi\to x_0^-} g'(\xi)=\lim_{x\to x_0^-} g'(x)=B。$$

同理可得

$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)=C$，定理证毕。

收稿日期：2011-07-20
基金项目：2009 淮阴工学院教育教学研究课题："通识教育理念下大学数学课程人文教育功能的探索研究"（编号：JYC200928）
作者简介：胡国专（1967—），男，江苏淮安人，淮阴工学院副教授，硕士，研究方向：教学法。

该定理表明：（1）如果分段函数在分段点 x_0 连续，且函数在 x_0 两侧导数的极限均存在,那么左、右导数都可用该定理的公式求得。

（2）可据函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右导数判别 $f'(x_0)$ 的存在性，如 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=B$，则 $f'(x_0)=B$，否则 $f(x)$ 在 x_0 点不可导。

例 1：设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(e^x-1) & x\le 0\\ x\arctan\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性，并求导函数 $f'(x)$。

解：显然函数 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 连续,

$$g'(x)=\left(\frac{\pi}{2}(e^x-1)\right)'=\frac{\pi}{2}e^x$$

$$h'(x)=\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)'=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

据定理 1 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi}{2}e^x=\dfrac{\pi}{2}$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}h'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$

所以：$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}e^x & x\le 0\\ \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2(x+1)} & x>0\end{cases}$

注意到上例中 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 连续，$h'(x)$ 在点 $x=0$ 不连续，若加强条件使 $h'(x)$ 在分段点连续，可得推论 1，其结论更加简洁、实用。

推论 1：设分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x) & x<x_0\\ A & x=x_0\\ h(x) & x>x_0\end{cases}$，

如果函数 $f(x)$ 满足：

（1）在点 x_0 处连续；

（2）在点 x_0 的某空心邻域内可导，且 $\exists\delta>0$，$g'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 内连续，$h'(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 内连续；

则 $f'_-(x_0)=g'_-(x_0),\quad f'_+(x_0)=h'_+(x_0)$。

说明：（1）据函数在点 x_0 左、右导数的定义，定理的结论是显然的。

（2）如果分段函数 $f(x)$ 在分界点 x_0 连续，且 $f(x)$ 在点 x_0 两侧导数 $g'(x)$、$h'(x)$ 具有连续性，那么 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右导数可用 $g'(x)$、$h'(x)$ 在点 x_0 的函数值求得。

（3）一般来说 $g'(x)$、$h'(x)$ 仍是初等函数，只要 x_0 在其定义区间内，则可用此法分析函数在分段点的可导性，避开繁琐的导数定义，大大简化讨论的过程，这也正是本文极力举荐的原因。

例 2：设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+2 & x<1\\ x^2+3 & x\ge 1\end{cases}$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的可导性。

解：显然函数 $f(x)$ 在分段点 $x=1$ 连续，$g'(x)=(2x+2)'=2$，$h'(x)=(x^2+3)'=2x$，$g'(x)$、$h'(x)$ 在 $x=1$ 连续，据推论 1，$f'_-(1)=g'(1)=2,\quad f'_+(1)=h'(1)=2$，从而函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导且 $f'(1)=2$。

例 3：设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x<0\\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$

求 $f'(x)$。

解：$g(x)=x^2 s\text{in}\dfrac{1}{x}$ $g'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to0^-}g'(x)$ 不存在，此函数不满足定理 1 中的条件(3)，所以不能用定理 1 来判断此函数在点 $x=0$ 处是否可导。为此我们用导数定义求解，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0\text{ 。}$$

$h(x)=x^2,h'(x)=2x$ 在 $x=0$ 连续，据推论 1 得：$f'_+(0)=h'_+(0)=0$，从而 $f'(0)=0$。综合得

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$$

此例充分说明上述定理与推论只是求函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数的一个实用的充分条件。对比此例中的导函数，有如下更一般的结论：

定理 2：设 $f'(x)$ 在区间 I 上存在，则 $f'(x)$ 在 I 上不可能有第一类间断点，即在区间 I 上，$f'(x)$ 或连续或有第二类间断点。

证明:反证法，假设 $x_0\in I$ 是 $f'(x)$ 的第一类间断点，则 $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$ 都存在。

若 $f'_-(x_0)$=$f'_+(x_0)$，则由 $f'(x_0)$ 存在的充要条件得，$f'(x_0)=f'_-(x_0)$=$f'_+(x_0)$，即 $f'(x)$ 在点 x_0 处连续与假设矛盾；

若 $f'_-(x_0)\ne f'_+(x_0)$，则 $f'(x_0)$ 不（下转 133 页）

课题上的知识的传授，就只能是纸上谈兵，对学生无实际的教育意义。所以，在实施教学上的改革措施，一定要遵循理论与实践相结合原则，在传授商务日语的知识的同时，要让学生亲身去体会商务日语的实际应用，让学生到一线的商务社交活动去实践和学习。

2. 突出实效性原则

商务日语课程是日语专业学生在学习日语语言知识的同时，对商务日语知识的掌握。由于商务日语课程的内容，从广义上来看，涉及到各行各业所有办公，事务型的工作日语。不同行业的日语专门术语和专业知识也不同。在商务日语课程中是不可能面面俱到的。在商务日语课程的教学中，要根据大多数学生的就业需求，例如大部分学生毕业后从事对日贸易工作，在课程上就要针对贸易流程和贸易技巧的商务日语进行教授。例如在福建省就业的学生中就有很多从事石材行业的对日贸易，这样就应对石材行业的商务日语知识和该行业知识进行传授，突出实效性原则，确保学生学以致用。

3. 确保日语语言能力原则

商务日语课程是以日语语言能力为基础和前提的课程。有的教师认为商务日语课程主要是教授商务知识，而忽视了学生日语的听说读写译的能力的培养和提高。这种做法忽视了商务课程的前提和基础，疏忽了商务日语课程的教学目的是培养学生利用日语语言能力，运用商务日语知识进行中日商贸工作。

四、结语

商务日语课程改革是外语教育改革的一个典型个案。随着中日贸易往来的深入发展，商务日语人才的需求也将趋于旺盛，对商务日语课程的改革，有利于日语专业学生的实际能力的拓展，对整个日语专业的改革和发展起着重要的推动作用。

参考文献：

[1]石若一,石田哲也等.当代商务日语教学创新的研究[J].日语学习与研究，2009,(6).

[2]詹桂香.跨文化教育中的日本概况教学研究[J].日语学习与研究，2007,(3).

[3]王秀文.日语教育改革与人才培养模式的构建[J].贵州民族学院学报，2007,(1).

[4]周林娟.商务日语大全[M].上海：上海科技技术文献出版社，2002.

[5]周福忠,王忻.关于商务日语专业建设的思考[J].兰州商学院学报，2002,(1).

[6]娄亚民.多媒体网络技术在日语教学中的运用[J].中国成人教育，2007,(2).

（上接128页）存在，与已知 $f'(x_0)$ 存在矛盾。

所以点 x_0 不可能是 $f'(x)$ 的第一类间断点。

例 3 中的函数 $f(x)$ 即为 $f'(0)$ 存在但 $x=0$ 是 $f'(x)$ 第二类间断点的情形，讨论其分段点导数需用定义方法。

根据定理 1，拓展其结论，可进一步得如下推论：

推论 2：分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ A & x=x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)$ 存在而不等或不全存在时，则 $f'(x_0)$ 不存在。

推论 3：分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq x_0 \\ A & x=x_0 \end{cases}$ 在点 x_0 连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)$ 存在，则 $f'(x_0)$ 存在，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)$。

推论 4：设函数 $g(x)$ 可导，$f(x)=|g(x)|=\begin{cases} -g(x) & g(x)<0 \\ g(x) & g(x)\geq 0 \end{cases}$ 在 x_0 点导数的结论如下：

（1）$g(x_0)\neq 0$，当 $g(x_0)>0$ 时，则 $f'(x_0)=g'(x_0)$；当 $g(x_0)<0$ 时，$f'(x_0)=-g'(x_0)$；

（2）$g(x_0)=0$，当 $g'(x_0)=0$ 时，则 $f'(x_0)=0$；当 $g'(x_0)\neq 0$ 时，$f'(x_0)$ 不存在。

利用定理 1 及其推论，对于分段函数分段点的可导性判别问题，可大大简化过程，得出结论。

三、结论

分段函数的导数问题，上述讨论说明，通过求分段区间上初等函数导数的函数值或其极限的方法来简化分段函数可导性的判别是有效的，但此方法仍有局限性，可用回到导数定义的方法来弥补这个缺陷。

参考文献：

[1]同济大学应用数学系.高等数学[M].北京：高等教育出版社，2002:78-82

[2]郭跃华.关于分段函数导数的计算[J].教学与研究，1995,(Z1):28-29

[3]塔怀锁.分段函数的导数[J].北京工业职业技术学院学报，2004,(4):67-68

[4]任树联.讨论分段函数在分界点处极限、连续性及导数的定理[J].宜春学院学报，2006,(8):15-16

[5]姜海勤,曹瑞成.分段函数分段点可导性的一个定理及应用[J].扬州职业大学学报，2008,(6):42-44.