2012年第5期（上旬）
中学数学教学参考

对曲线切线的思考与认识

对学生解题错误的思考和研究，能帮助我们更好地教好数学.

张　彬（江苏省江浦高级中学文昌校区）

不可否认，一些高等数学知识的引入，为我们解决高中数学中的许多问题提供了方法与保证. 导数知识的引入，更是为我们研究初等函数的性质等增添了有力的工具[1]. 然而，要想正确地解决数学问题，仅有工具是不够的，还需要我们对数学的概念有精准地认识，并切实把握其本质才行. 本文拟从曲线切线问题的解决中遇到的错误出发，谈对曲线切线问题的思考与认识.

1　问题出现

在讲完导数的几何意义及运用后，笔者出了一道关于曲线切线的练习题，本意是考查学生对"过某点的切线"与"在某点处的切线"这两类不同问题的掌握情况. 题干非常简洁，但要求写出解答过程（这是笔者的习惯，平时训练一定做到"小题大做"——许多时候，小问题可以有大寓意和大作用[2]，并能帮助我们及早发现和解决许多问题）.

例 1　过(1,0)点与曲线 $y=x^3$ 相切的直线有______条.

对于这个问题，几乎所有的学生都给出了完整正确的解答过程，但也有错误的答案：1 条. 现摘录错误解答过程如下：

解：设切点坐标为 $P(x_0,y_0)$，则由 $y'=3x^2$ 知，切线的方程为 $y-y_0=3x_0^2(x-x_0)$，

$\because y_0=x_0^3$ 且切线过点(1,0)，代入化简得 $2x_0^3-3x_0^2=x_0^2(2x_0-3)=0$，

$\therefore$ 切点为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{3}{2},\frac{27}{8}\right)$.

$\therefore$ 切线方程为 $y=0$（舍）或 $27x-4y-27=0$.

$\therefore$ 符合条件的直线有 1 条.

（另外，也有人为了更"清楚"地说明问题，特别在解题过程旁附图加以辅助说明）

2　错误分析

为什么说这是一个错误的答案？我们先来看文

时取等号，故 $\sqrt{3}AB-AC$ 的最大值为 4.

方法 2：由基本不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$ 得 $\sqrt{3}bc=(\sqrt{3}b)\cdot c\leqslant\frac{3b^2+c^2}{2}$，从而 $-\sqrt{3}bc\geqslant-\frac{3b^2+c^2}{2}$，得 $4=b^2+c^2-\sqrt{3}bc\geqslant b^2+c^2-\frac{3b^2+c^2}{2}=\frac{c^2-b^2}{2}$，即 $c^2-b^2\leqslant 8$.

故 $(\sqrt{3}AB-AC)^2=(\sqrt{3}c-b)^2=3c^2+b^2-2\sqrt{3}bc=3c^2+b^2-2(c^2+b^2-4)=c^2-b^2+8\leqslant 8+8=16$，故 $\sqrt{3}AB-AC$ 的最大值为 4.

不难知道，其他方法也是可行的，其尝试留给读者去完成，去品味.

罗增儒教授曾说："数学解题无禁区，数学教学有讲究."有意积累"知识链、方法链"，我们常说的"举一反三""触类旁通"不就落到了实处？

我们的"小题大做"不也是课堂对高考真题的有效利用？

原来，发散提升理解，回归促进掌握！

别的艺术有"余音绕梁""三月不知肉味"之说，数学解题的滋味不也同样让人回味悠长？

参考文献：

[1]　薛金星. 2011 年全国及各省市高考试题全解 · 数学卷[M]. 西安：陕西出版集团 · 陕西人民教育出版社，2011.
[2]　李朝东. 高考档案 · 文科数学（课标版）[M]. 银川：宁夏人民出版社，2011.
[3]　罗增儒. 怎样解答高考数学题[M]. 西安：陕西师范大学出版社，1994.
[4]　罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2008.
[5]　罗增儒. 中学数学解题的理论与实践[M]. 南宁：广西教育出版社，2008.

[3]对曲线切线的定义：

在 $y=f(x)$ 所表示的曲线上（图 1）取一点 $M(x_0,y_0)$，又在它邻近取此曲线上的另一点 $M'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. 并过点 M 作平行于 x 轴的直线交 $P'M'$ 于 Q，那么

$MQ=PP'=\Delta x, PM=y_0,$

$P'M'=y_0+\Delta y, QM'=\Delta y.$

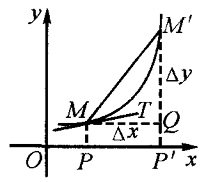

图 1

显然，割线 MM' 的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 当 M' 沿曲线 $y=f(x)$ 趋近于 M 并以它为极限时，割线 MM' 的极限位置 MT 叫做该曲线在点 M 处的切线.

需要说明的是：由于苏教版数学教材不涉及极限内容，因此，采用了由“割线”逼近“切线”的描述定义方式进行相应的处理，其本质与高等数学中取极限的思想方法是完全一致的，教材中的叙述也与文[3]类似.

文[4]的叙述：如图 2，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线的割线. 随着点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼近曲线 C. 当点 Q 无限逼近点 P 时，直线 PQ 最终就成为在点 P 处最逼近曲线的直线 l，这条直线 l 称为曲线在点 P 处的切线.

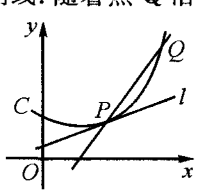

图 2

其实，这两个定义都在告诉我们，所谓切线，就是由“割线”→“切线”. 所以，用其来对照例 1 中的直线 $y=0$，我们就能知道：无论 $x\to0^+$ 还是 $x\to0^-$，它都恰好是由“割线”→“切线”，因此，它是函数 $y=x^3$ 在原点处的唯一的切线（*）.

那么，前面的解题过程中为什么会出现错误的“舍”呢？经过与学生的探讨与交流，笔者发现他们的错误理由是：由于 $y=0$ 穿过该曲线，因此它不是切线. 其“理论依据”是初中“圆的切线”的定义：“直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做圆的切线，这个公共点叫做切点，这条直线叫圆在该点的切线.[5]”并且认为，从这个定义看，曲线的切线必须满足两个条件：一是切线与曲线有且只有一个公共点；二是曲线必须在切线的同侧——数形结合. 这是典型的负迁移. 一方面，表明学生对切线的认识出现了偏差，形成了错误概念；另一方面，说明教师在讲解时没有把切线的形成与概念强调到位. 出现这样的错误还应该与教师在授课时采用圆的切线这个学生熟悉的概念引入但却强调不够有关.

分析探讨出原因，笔者具有针对性地进行了纠正，并提供了相应的强化练习.

例 2 求下列曲线在原点处的切线方程：

(1) $y=x^2$；(2) $y=\sin x$.

在之后历次的练习与考试中，学生没有再出现相同的错误.

3 教学建议

由于切线问题不是所属知识的重点与难点，因此，对于上述错误的预防和这部分知识的教学，笔者提出以下建议.

3.1 掌握体系 了解学生

作为教师，仅仅满足于“亡羊补牢”是不够的，关键是如何避免学生在后面的学习中再犯同样的错误，或者在其他与初中有关联的知识衔接处产生类似错误. 笔者认为，高中教师应该了解初中教材对与高中相关知识的定义与描述，掌握初中与高中的知识衔接，以了解学生对应的知识基础与结构，做到讲课具有针对性和有效性. 就上面问题而言对任何学生都可能产生：对初中数学基础好的学生来说，曲线必须在切线的同侧，且有一个公共点；对基础相对薄弱的学生，纠正后，也要防止类似于 $y=a$ 是抛物线 $y^2=4x$ 的切线等错误的产生. 这里，笔者认为“矫往不一定要过正”，只要讲清楚、听明白、会使用就行.

3.2 重视课本 理解本质

由前面的叙述我们已经知道，就曲线切线的定义来说，高中教材是完全正确并能凸显其本质的. 因此，注重教材关于切线的描述，理解其定义的本质，才能够正确深刻地认识切线. 其实，就数学教学而论，笔者一直认为教师“要充分领会教材的编写意图，要在宏观上理清思路，在微观上推敲细节，并多思考教材为什么这样编写，把握好教材的编写线索[6]”，这样才能够使自己在课堂教学中少走或不走弯路.

3.3 注意引入 抓住本质

有的教师认为切线问题是简单问题，并且在初中就已经学过，因此，在讲授该内容时，习惯于由已知的切线概念（初中）引入，殊不知，这反而会使学生容易出现上述错误. 以笔者的观点，如果这样引入，则要改进初中圆的切线的定义为：“对于圆这样的封闭图形而言，当直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做圆的切线，这个公共点叫做切点，这条直线叫圆在该点的切线.”这样的改进，其目的还是强调只是针对圆等特殊曲线才能这样定义切线——让学生在初中认知中重新构建新的切线的知识体系.

当然，我们也可以直接以“割线”→“切线”的形式引入，但为了使学生改变对文[5]定义的认识而形成正确概念，最好同时将这种极限式描述定义直接用于对圆的切线加以说明.

3.4 心中有数 教学淡化

由于苏教版教材没有引入极限的概念，而只由"割线"→"切线"进行切线的描述性定义，因此，笔者要说，教材可以淡化，但教师必须做到心中有数. 也就是在这个内容的讲解中，教学可以淡化，但应该知道这是学生可能出错的地方. 教师只要做到"说理清楚，讲解到位"，并能结合现代教育技术手段（如 PPT 或 Flash 等）进行切线形成的直观演示，让学生进行听觉与视觉的感受与理解，就能够使学生对已知的切线概念有进一步清晰的认识，从而克服思维定势，形成正确概念.

4 问题延伸

笔者认为，作为教师，仅仅明白了什么样的直线是曲线的切线是不够的，如，(1) $y=0$ 穿曲线而过，它是曲线 $y=x^3$ 的切线，那 $x=0$ 也穿曲线而过，为什么不是 $y=x^2$ 的切线（细究起来，该函数的切线却正好符合上述学生对切线的两点理解）？(2)过原点的直线有无数条，是不是都是曲线 $y=x^3$ 的切线？或者说，为什么只有 $y=0$ 这一条直线是其切线？还有一些问题需要我们教师明白.

4.1 函数的拐点与切线

当我们对这个问题进行深入研究，就会发现，文[3]早已经回答了这个问题：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上具有二阶连续导数 $f''(x)$，又 x_0 为 (a,b) 内一点.

(i)当 $f''(x)$ 在 x_0 的左边附近处恒为一种符号，在 x_0 的右边附近处恒为另一种符号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的一个拐点，这时 $f''(x_0)$ 必定为零.

(ii)当 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右附近处都保持同一种符号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

从以上定义的叙述中，我们知道，拐点就是函数凹凸性转换的交接点，对于问题(1)，点(0,0)正是函数 $y=x^3$ 的拐点，因此，$y=0$ 是其切线，而(0,0)点不是函数 $y=x^2$ 的拐点，所以 $x=0$ 虽然穿线而过且只有一个交点，但不是该抛物体的切线. 推而广之，我们知道，曲线在拐点处的切线必然是穿曲线而过的.

我们再来考虑第二个问题(2)：由于在原点处切线的斜率为 $f'(0)$ 是一个常数，而原点又是一个定点，因此，只有 $y=0$ 这一条直线是曲线 $y=x^3$ 的切线. 当然，切线的唯一性也可以从"割线"→"切线"这个角度来理解与认识（见前(*)）.

4.2 导数不存在的点与切线

我们再来研究抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在原点处的切线问题，由 $x=0$ 是其在原点处的切线，但其导数在该点却不存在，这还可以给我们有如下的启示：导数不存在的点也可能存在曲线的切线，再如函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 等.

4.3 其他运用

来看两个例子，以说明其运用.

例 3 函数 $y=\sin x$ 的图象与函数 $y=x$ 的交点为______个.

由 $y=\sin x \Rightarrow y''=-\sin x$ 知，当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$y''>0$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$y''<0$，故(0,0)为函数 $y=\sin x$ 的拐点，而 $y=x$ 恰好是其过原点的切线，是穿曲线而过的.

又由三角函数（单位圆）知识：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$，故交点只有一个.

当然，这个例子还有其他多种解法，限于篇幅，这里不再赘述.

例 4 函数 $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处的切线方程是什么？（解略）

这两个例子说明拐点这样的知识点对我们研究函数的性质与函数图象间关系还是有一定作用的，至少是提供了一种解决问题的方法.

5 结束语

如前所述，曲线的切线问题不是重点，更不是难点，笔者将由学生出现的错误引起的对其进行的思考与认识写成此文，并不是说要在课堂上对这个问题进行深究，而是提醒同仁注意初高中知识的无痕对接，否则，只会加重学生学习数学的负担，那将有悖于本文之目的. 以上观点，仅供参考.

参考文献：

[1] 张彬. 一个正确结果下的错误概念——关于导数与极值关系问题的思考[J]. 中学数学教学参考（上旬），2010(5)：28-30.

[2] 张彬. 算法欣赏[J]. 中学数学教学参考（上旬），2011(4)：2-4.

[3] 樊映川. 高等数学讲义（上册）（第2版）[M]. 北京：人民教育出版社，1964.

[4] 单墫. 普通高中课程标准实验教科书·数学（选修2-2）[M]. 南京：江苏教育出版社，2008.

[5] 杨裕前，董林伟. 义务教育课程标准实验教科书·数学（九年级（上册））（第2版）[M]. 南京：江苏科学技术出版社，2007.

[6] 张彬. 教师应当注重对教材的使用与挖掘——对几何概型中测度的理解与辨析[J]. 中学数学教学参考（上旬），2010(1/2)：35-36.