湖北《中学数学》2008 年 12 月

也谈几个精彩的平方和不等式

712000　咸阳师范学院基础教育课程研究中心　安振平

文[1]建立了一串十分优美的平方和不等式，本文的目的是对它们做一点深化.

定理 1　设 a,b,c 是不相同的实数，λ 是实数，求证:

$$\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\lambda^2+2\lambda+1. \qquad （1）$$

证明：令 $x=\dfrac{a}{a-b},y=\dfrac{b}{b-c},z=\dfrac{c}{c-a}$，则有

$$\begin{aligned}(x-1)(y-1)(z-1)&=\frac{b}{a-b}\cdot\frac{c}{b-c}\cdot\frac{a}{c-a}\\&=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b}{b-c}\cdot\frac{c}{c-a}\\&=xyz,\end{aligned}$$

即　$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz,$$

变形得　$$x+y+z=xy+yz+zx+1.$$

从而，有　$$\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2$$

$$\begin{aligned}&=(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2+(z+\lambda)^2\\&=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+2(\lambda-1)(x+y+z)+3\lambda^2\\&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx+1)+2(\lambda-1)(x+y+z)+3\lambda^2\\&=(x+y+z)^2+2(\lambda-1)(x+y+z)+3\lambda^2+2\\&=(x+y+z+\lambda-1)^2+3\lambda^2+2-(\lambda-1)^2\\&\geq 2\lambda^2+2\lambda+1,\end{aligned}$$

所以　$$\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\lambda^2+2\lambda+1.$$

特别地，当 $\lambda=0$ 时，由不等式（1），立得文[1]里的定理 4：

推论 1 设 a,b,c 是不相同的实数，求证:

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 1. \qquad （2）$$

设 $x=\dfrac{a}{b},y=\dfrac{b}{c},z=\dfrac{c}{a}$，则 $xyz=1$.于是，由不等式（2）便得 2008 年第 49 届 IMO 试

题里有这样一道不等式题:

推论 2　设实数 x、y、z 都不等于 1，满足 $xyz=1$，求证：

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1. \tag{3}$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，由不等式（1），就得出如下 2004 年泰国数学竞赛试题.

推论 3　设 a,b,c 是不相同的实数，求证:

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2\geq 5. \tag{4}$$

定理 2　设 a,b,c 是不相同的实数，λ 是实数，求证:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\left(\lambda^2+1\right). \tag{5}$$

证明　令 $x=\frac{a+b}{a-b}, y=\frac{b+c}{b-c}, z=\frac{c+a}{c-a}$, 则

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=(x+1)(y+1)(z+1),$$

即有　$xy+yz+zx=-1$，从而，得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a+b}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}+\lambda\right)^2\\&=(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2+(z+\lambda)^2\\&=\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\lambda(x+y+z)+3\lambda^2\\&=\left[(x+y+z)^2+2\lambda(x+y+z)+\lambda^2\right]+2\lambda^2-2(xy+yz+zx)\\&=\left[(x+y+z)+\lambda\right]^2+2\lambda^2+2\\&\geq 2\lambda^2+2,\end{aligned}$$

所以　$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\left(\lambda^2+1\right).$$

特别地，当 $\lambda=0$ 时，由不等式（5），立得文[1]里的定理 3:

推论 4　设 a,b,c 是不相同的实数，λ 是实数，求证:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\geq 2. \tag{6}$$

特别地，当$\lambda=1$时，由不等式（4），立得文[1]里的定理 4，也即上文的推论 1.

定理 3　设a,b,c是不相同的实数，λ是实数，求证:

$$\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\left(\lambda^2+1\right). \qquad (7)$$

证明　令$x=\dfrac{a}{a-b},y=\dfrac{b}{b-c},z=\dfrac{c}{c-a}$,则

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=(x+1)(y+1)(z+1),$$

即有　$xy+yz+zx=-1$，从而，得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2\\
&=(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2+(z+\lambda)^2\\
&=\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\lambda(x+y+z)+3\lambda^2\\
&=\left[(x+y+z)^2+2\lambda(x+y+z)+\lambda^2\right]+2\lambda^2-2(xy+yz+zx)\\
&=\left[(x+y+z)+\lambda\right]^2+2\lambda^2+2\\
&\geq 2\lambda^2+2,\end{aligned}$$

所以　$$\left(\frac{a}{a-b}+\lambda\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+\lambda\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+\lambda\right)^2\geq 2\left(\lambda^2+1\right).$$

特别地，当$\lambda=0$时，由不等式（7），立得文[1]里的定理 2：

推论 5　设a,b,c是不相同的实数，λ是实数，求证:

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 2. \qquad (8)$$

参考文献

1．宋庆. 几个精彩的平方和不等式，中学数学（湖北大学），2008，9
2．安振平. 不妨换一个角度去探究，数学教学（华东师大），2008，2