**2006099C[1] 第一章拓展资源**

**11．命题演算**

命题是指有真假意义的陈述句。命题演算是数理逻辑的一部分，它主要研究命题如何通过一些命题联结词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。

如果我们把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑联结词看作代数中的“加、减、乘、除”那样的运算，那么由简单命题组成复合命题的过程，就可以当作逻辑运算的过程，从而实现命题的演算。

这样的逻辑运算也同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律。例如满足交换律、结合律、分配律，同时也满足逻辑上的同一律、吸收律、双否律、德.摩根定律、肯定律、否定律和析取三段论等推理定律。利用这些定律，我们可以进行逻辑推理，可以简化复合命题，可以推证两个复合命题是不是等价，某个命题是否是若干前提的有效结论等等。

**12．命题演算的一个具体模型--逻辑代数**

逻辑代数也叫开关代数，它的基本运算是逻辑加、逻辑乘和逻辑非，也就是命题演算中的“或”、“与”、“非”，运算对象只有两个数 0和 1，相当于命题演算中的“真”和“假”。

     逻辑代数的运算特点是只有两种不同的状态（0和1），因此可以很方便地模拟和表示电路分析中的接通和断开状态，因此，它在电路分析中得到广泛的应用。

与门、或门和非门这三种基本门电路可以用对应的命题联结词表示出来，这就是逻辑元件。

“与逻辑”指的是：只有当决定某一事件的全部条件都具备之后，该事件才发生，否则就不发生的一种因果关系。“与门”是指能够实现与逻辑关系的门电路。与门具有两个或多个输入端（设为P，Q，…，R），一个输出端（设为G）。与门的输出和输入之间的逻辑关系用逻辑表达式表示为：G=P∧Q∧…∧R。

“或逻辑”指的是：在决定某事件的诸条件中，只要有一个或一个以上的条件具备，该事件就会发生；当所有条件都不具备时，该事件才不发生的一种因果关系。“或门”是指能够实现或逻辑关系的门电路。或门具有两个或多个输入端，（设为P，Q，…，R）一个输出端（设为G）。 或门的输出与输入之间的逻辑关系用逻辑表达式表示为：G=P∨Q∨…∨R。

“非逻辑”是指：决定某事件的唯一条件不满足时，该事件就发生；而条件满足时，该事件反而不发生的一种因果关系。“非门”是指能够实现非逻辑关系的门电路。它有一个输入端（设为R），一个输出端（设为P）。非门的输出与输入之间的逻辑关系用逻辑表达式表示为：R=¬P。

通过逻辑代数的表达式能把一个个独立的逻辑元件组合成各种逻辑网络，从而使对应的电子线路具有某种逻辑功能。因此，逻辑代数在逻辑电路设计中有十分重要的应用。

**13．逻辑联结词析取∨、合取∧和否定**¬**表示与门、或门和非门**

从逻辑关系看，门电路的输入端或输出端只有两种状态，无信号以“0”表示，有信号以“1”表示。设P，Q表示两个输入。

“与门”的逻辑功能可用P∧Q表示，即当输入端P和Q都有信号时，输出端才有信号。只要输入端P或Q之一没有信号，输出端就没有信号。

“或门”的逻辑功能可用P∨Q表示，即只要输入端P或Q之一有信号，输出端就有信号。只有当输入端P和Q都没有信号时，输出端才没有信号。

“非”门的逻辑功能可用¬P表示，即当输入端P没有信号时，输出端有信号。而当输入端有信号时，输出端就没有信号。

**14．逻辑联结词析取∨、合取∧表示开关电路的功能**

设P和Q是两个开关。则两个开关的串联可以用命题公式P∧Q表示（只有当P和Q都为1，即两个开关都闭合时，电路才通），两个开关的并联可以用命题公式P∨Q表示（只要P和Q中有一个为1，即两个开关至少有一个闭合时，电路就通）。

例如，由命题逻辑中的基本等价式(P∧Q∧S)∨(P∧R∧S)∨(P∧S)P∧S（由吸收律），和命题公式(P∧Q∧S)∨(P∧R∧S)∨(P∧S)对应的开关电路，可化简成一个等效的和命题公式 P∧S对应的开关电路。显然第二种开关电路既可靠成本又低。

**15．将下面一段用ALGOL60编写的程序段化简：**

if A then

if B then X

else Y

else if B then X

else Y

从该程序段可以看出，执行X的条件用命题公式表示是(A∧B)∨(¬A∧B)，执行Y的条件是(A∧¬B)∨(¬A∧¬B)。由分配律、排中律和同一律可知(A∧B)∨(¬A∧B)B，(A∧¬B) ∨(¬A∧¬B)¬B。因此上述程序段可等效地改写

if B then X

else Y

**16．设计一个为三人小组进行秘密表决的电路，要求信号指示灯在两人或两人以上按下表决开关表示同意时亮，否则不亮。**

设三人分别控制开关P，Q和R，S表示指示灯。当命题变元取值为1 时，表示对应的人按下开关表示同意，命题变元取值为0 时，表示对应的人反对。S取值为1表示指示灯亮，S取值 为0表示指示灯不亮。由题意列出P，Q，R和S的对应关系如下：

|  |  |
| --- | --- |
| P Q R | S |
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 |
| 0 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 |

则S与P，Q，R的对应关系可用如下命题公式表示

S(¬P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧R)∨(P∧Q∧¬R)∨(P∧Q∧R)

由命题逻辑的基本等价式，利用公式推导法可得

S(¬P∧Q∧R)∨(P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧R)∨(P∧Q∧R)∨(P∧Q∧¬R)

∨(P∧Q∧R)(Q∧R)∨(P∧R)∨(P∧Q)(Q∧R)∨(P∧(R∨Q))

按此公式设计开关电路就可满足要求。

**17．半加器的逻辑电路**

在数字系统中算术运算都是利用加法进行的，加法在数字系统中分为全加和半加，因此半加器是数字系统中最基本的运算单元之一。由于二进制运算可以用逻辑运算来表示，因此我们可以用逻辑设计的方法来设计半加器的运算电路。

半加器不用考虑低位向本位的进位，因此它有两个输入端和两个输出端： 设加数（输入端）为P、Q，和为S，向高位的进位为C。则两个加数相加的结果可由如下真值表表示：

|  |  |
| --- | --- |
| P Q | S C |
| 0 0 | 0 0 |
| 0 1 | 1 0 |
| 1 0 | 1 0 |
| 1 1 | 0 1 |

得出对应的命题公式为

S(¬P∧Q)∨(P∧¬Q)

CP∧Q

按上述公式就可设计出半加器相应的逻辑电路。

类似地我们也可以设计出全加器的逻辑电路。

**18． A、B、C、D四人参加考试。有人问他们，谁的成绩最好？A说“不是我”，B说“是D”，C说 “是B”，D说“不是我”。四人的回答只有一个人符合实际，问成绩最好是哪些人？若只有一个人成绩最好，是谁？**

（问题解析：这是GRE考试中逻辑推理部分常见的题型：先给出若干基本条件，然后在补充条件的共同作用下能得出什么有效结论。可把条件符号化，然后将它们处理得到一个命题公式。求出该公式的主析取范式。则主析取范式中的每个小项都代表可能的结果。再由补充条件得到合乎要求的小项。）

解：

设命题变元P：A成绩最好，Q：B成绩最好，R：C成绩最好，S：D成绩最好，则A、B、C和D说的话可分别符号化为：¬P，S，Q，¬S。

因为四人的回答只有一个人符合实际（即有四种可能：A符合，B、C、D不符合；B符合，A、C、D不符合；C符合，B、A、D不符合；D符合，B、C、A不符合），故可得到下列命题公式：

(¬P∧¬S∧¬Q∧S)∨(P∧S∧¬Q∧S)∨(P∧¬S∧Q∧S)∨(P∧¬S∧¬Q∧¬S)

 (P∧¬Q∧S)∨(P∧¬Q∧¬S)

 (P∧¬Q∧(R∨¬R)∧S)∨(P∧¬Q∧(R∨¬R)∧¬S)

 (P∧¬Q∧R∧S)∨(P∧¬Q∧¬R∧S)∨(P∧¬Q∧R∧¬S)∨(P∧¬Q∧¬R∧¬S)

因此，如果四人的回答只有一个人符合实际，则可能有下列四个可能：

1）A、C和D三人并列成绩最好；

2）A和D两人并列成绩最好；

3）A和C两人并列成绩最好；

4）A的成绩最好；

但如果一人成绩最好，则只可能是A。

**19. 食言呢，还是不合逻辑呢？**

**一个星期六的晚上，青工小丁去小张家里，约小张星期日一起去看画展。小张说：“如果明天不下雨，我要去图书馆查一个重要的资料。”**

**第二天，下起了毛毛细雨。小丁想，既然今天下雨了，小张一定不会去图书馆了。于是又去小张家里，约他去看画展。谁知小张仍然去图书馆了。**

**星期一见面后，小丁责备小张食言，既然天下了雨，为什么还去图书馆呢！但小张却说，他并没有食言，而是小丁的推论不合逻辑。**

**请问：究竟是小张食言了呢，还是小丁的推论不合逻辑呢？**

(问题解析：这是学生在推理过程中经常犯的一个错误：错用肯定律或否定律。）

解：

小丁的推论不合逻辑。

小丁思考问题的过程，可以整理为如下推理过程：

如果今天不下雨，那末，小张就会去图书馆。

今天下雨。

所以，今天小张不会去图书馆。

设P：今天下雨，Q：小张去图书馆。则小丁的推理过程可形式化为：

前提：¬P→Q，P；结论Q

（1） ¬P→Q

（2） P

（3） ¬Q

这个推理是不合逻辑的。因为它((¬P→Q)∧P)→¬Q不是永真式，故(¬P→Q)∧P¬Q不是永真蕴涵式。小丁很有可能错用了肯定律。

事实上，小张只是说“如果明天不下雨，我要去图书馆”，而并没有说“如果明天下雨，我就不去图书馆”，如果明天下雨，小张可能去，也可能不去图书馆。因此，小张不存在“食言”的问题，而是小丁的推论不合逻辑。

**20. 在下列乘法算式中，每个字母代表0-9的一个数字，而且不同的字母代表不同的数字：**

**AS**

**　A**

**MAN**

**请问A、S，M、N分别代表0～9中的哪一个数字？**

答：

A不能是0，否则M和N也都等于0，这与已知矛盾。

A不能是1，否则N和S代表同一个数字，这与已知矛盾。

A不能是2。否则乘积的十位数不可能还是2。

A不能是3。否则因为A×A=9，而3×S的进位最多是2，因此乘积的十位数不可能是3。

同理，A不能是4或7。

A不能是5。否则因为5×S不能有进位（如果有进位，则乘积的十位数不可能还是5），所以S只能等于0或1。若S=0，则N=S，这与已知矛盾。若S=1，则A=N，这也与已知矛盾。

同理，A也不能是6。

A不能是9。否则因为乘积的十位数是9，故SA必须有进位8，这样S=A=9，这与已知矛盾。

综上所述A必定是8。

进一步我们还可以确定M，N和S的值。

要使乘积的十位数是A=8，则由于88=64，故SA必须有进位4。从而S=6或5。若S=6，则N=8，这与已知矛盾。故S=5。由此可得N=0，M=6。因此整个乘法算式如下：

　 85

　8

　680