**2006099C[1] 第一章拓展资源**

**36. 在《离散数学》的证明题中，直接证明法如何使用？**

**答：**直接证明法是最常见的一种证明方法，顾名思义是直接证明命题的真实性，即由命题给出的条件，根据已知的定义、公理、定理，经过一系列推理，最后得出结论。其过程可如下表示：

H1H2…HnC

其中H1是某个已知条件，Hi（2≤i≤m）或者是某个已知条件，或者是由已知条件和前面的中间结论按照定理或公理推导出来的中间结论，C是命题结论。

直接证明法有两种方式。一种方式是先从命题给出的条件出发，看看从已知条件按照定理或公理可以推出什么样的中间结论，并且判断这些中间结论中哪些与最后的结论有关，然后继续向下推理，直到得出命题的结论。这种“由因导果”的方法通常称为综合法。

另一种方式则是从命题结论出发，看看从哪些条件可以按照定理或公理推出这个结论，并且判断这些中间条件哪些与命题给出的条件有联系，然后继续反向推导，直到到达命题给出的条件。将这个过程逆转，就可得到证明的推理过程。这种“由果索因” 的方法通常称为分析法。

例1 P→Q，¬Q∨R，¬R，¬S∨P├ ¬S

问题解析：从已知条件可以看出，由前提（已知条件）¬Q∨R，¬R，根据析取三段论可以得到中间结论¬Q；由¬Q和P→Q根据否定律就可得到中间结论¬P；再由¬P和前提¬S∨P 根据析取三段论得到¬S，这就是命题结论。我们用综合法得到了整个推理过程。

证明：

（1） ¬R 前提

（2） ¬Q∨R 前提

1. ¬Q （1），（2）
2. P→Q 前提
3. ¬P （3），（4）
4. ¬S∨P 前提

（7） ¬S （5），（6）

例2 A，A→B，A→C，B→ (D→¬C)├ ¬D

问题解析：显然命题结论¬D与前提B→(D→¬C)有关，且是条件式的后件的前件，故如果能有中间结论B和C，就可依次根据肯定律和否定律得到¬D；中间结论B和C又和前提A→B，A→C有关，只要A成立，则根据肯定律就分别由A，A→B和A，A→C得出B和C。这样我们就用分析法建立了整个推理过程。

证明：

（1） A 前提

（2） A→B 前提

（3） B （1），（2）

（4） A→C 前提

（5） C （1），（4）

（6） B→ (D→¬C) 前提

（7） D→¬C （3），（6）

（8） ¬D （5），（7）

例3 证明：偶数阶群中阶为2 的元素的个数一定是奇数。

问题解析：这主要是考察学生对群的元素的阶的知识以及元素的阶和逆元素的阶的关系。由群的元素的阶的有关知识，任一个群中阶为1的就只有单位元一个，阶大于2的元素是成双成对出现的，其余的元素就是阶为2 的元素。故阶大于2的元素有偶数个。由于这是一个偶数阶群，而奇数加上一个偶数还是奇数，一个偶数减去一个奇数仍是奇数，故阶为2 的元素一定是奇数。我们用综合法得出了整个推理过程。

证明：

设<G, \*>是偶数阶群，则由于群的元素中阶为1 的只有一个单位元，阶大于2 的元素是偶数个，剩下的元素中都是阶为2 的元素。故偶数阶群中阶为2 的元素一定是奇数个。

例4 设群<G, \*>除单位元外每个元素的阶均为2，则<G, \*>是交换群。

问题解析：这主要是考察学生对交换律的掌握。若<G, \*>是交换群，则关于\*必须满足交换律，即对任意a, b∈G，a\*b=b\*a，a和b的运算结果与运算顺序无关。我们知道群的运算和逆元运算满足这样的性质：(a\*b)-1=b-1\*a-1，a和b的运算顺序有了变化。由已知条件，每个元素和它的逆元是同一的，即对任一a∈G，a-1=a。因此由(a\*b) -1=b-1\*a-1就可得a\*b=b\*a。这样我们就用分析法得出了整个推理过程。

证明：

对任一a∈G，由已知可得a\*a=e，即a-1=a。

对任意a, b∈G，因为a\*b=(a\*b) -1=b-1\*a-1=b\*a，所以运算\*满足交换律。

从而＜G, \*＞是交换群。

不管是综合法还是分析法，它们的逻辑依据是相同的，都是蕴涵的传递性，只是思考的顺序相反。而且对一个问题，并不一定用一种思路就可以完全解决，更多的时候需要将两种思路综合在一起使用。

例5 一次会议有20人参加，其中每个人都在其中有不下10个朋友。这20人围成一圆桌入席。有没有可能使任意相邻而坐的两个人都是朋友？为什么？

问题解析：这主要是考察学生对判断一个图是否是哈密尔顿图的充分条件的掌握。将每个人看成是顶点，两个人若是朋友，则对应的顶点是邻接的。则原问题求解就可对这样得到的无向图进行。原题的结论就可转化为是否能找出一条哈密尔顿回路了。由已知条件，对应的无向图满足哈密尔顿图的某一个充分条件，故该无向图是一个哈密尔顿图，而哈密尔顿图一定存在哈密尔顿回路。这样我们既用了分析方法又用了综合方法得出了整个推理过程。

证明：

可以。

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。由已知，图中每个顶点的度数都大于等于10。即图中任两个不相邻的顶点的度数大于等于20，即顶点数。故这个图是一个哈密尔顿图，从而存在哈密尔顿回路。任取一条哈密尔顿回路，按回路经过的顶点的次序安排对应的人的座位，就可满足要求。

**37. 在《离散数学》的证明题中，反证法如何使用？**

**答：**

反证法是一种间接证法，也是在《离散数学》的证明中比较常用的方法。它先提出一个与命题结论相反的假设，然后从这个假设出发，经过正确的推理，导致矛盾，否定命题结论相反的假设，从而达到肯定原命题结论的一种方法。反证法可以分为归谬反证法（结论的否定只有一种）与穷举反证法（结论的否定不只一种）。用反证法证明一个命题的步骤，大体上分为：（1）反设；（2）归谬；（3）结论。其过程可表示如下：

CH1H2…HnP∧¬P

其中H1是某个已知条件，Hi（2≤i≤m）或者是某个已知条件，或者是由已知条件和前面的中间结论按照定理或公理推导出来的中间结论，¬C是命题结论的否定。

归谬是反证法的关键，导出矛盾的过程虽然没有固定的模式，但必须从结论的否定出发。反证法的逻辑基础是形式逻辑的排中律，命题结论C和它的否定¬C中一个且只有一个为真，从而如果¬C为假，那么C必为真。这里的P∧¬P是一个永假式，导出的矛盾有如下几种类型：与已知条件矛盾；与已知的公理、定义、定理、公式矛盾；与结论的否定矛盾；自相矛盾。

例1 ¬B∨D，(E→¬F) →¬D，¬E├ ¬B

问题解析：结论¬B的否定是B。由前提¬B∨D和B，根据析取三段论可得到D；由前提(E→¬F) →D和D根据否定律可得到¬(E→¬F)；¬(E→¬F)等价于E∧F；由化简律可得E；这显然与前提¬E矛盾。这样我们就完成了用反证法证明的整个推理过程。

证明：

（1） B 附加前提

（2） ¬B∨D 前提

（3） D （1），（2）

（4） (E→¬F) →¬D 前提

（5） ¬ (E→¬F) （3），（4）

（6） E∧¬F （5）

（7） E （6）

（8） ¬E 前提

（9） E∧¬E （7），（8）

反设是反证法的基础。如果结论中含有：没有、有、等于或不等于、大（小）于或不大（小）于、都是或不都是、至少有一个或一个也没有、至少有n个或至多有（n-1）个、唯一或至少有两个等等这样的文字，往往就可以对结论进行否定，采用反证法证明。

例2 证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

问题解析：命题结论中含有“不存在”，故它的否定是“存在”。命题结论的反设是：在元素不少于两个的群中存在零元。现在要由零元的性质推出矛盾。在反证法的实施过程中，推出两个相互矛盾的中间结论是非常重要的。一般都是推出与某个已知条件的矛盾。但已知条件可能不止一个，这时一般选择比较特殊的条件，像本题中的“元素不少于两个”。然后就像直接证法一样进行思考，直到得到两个相互矛盾的结论（在本题中，就是“元素只有一个”和“元素不少于两个”）。这样我们就完成了用反证法证明的整个推理过程。

证明：（用反证法证明）

设在素不少于两个的群<G, \*>中存在零元*θ*。对∀a∈G, 由零元的定义有 a\**θ*=*θ*。

 <G, \*>是群，关于\*消去律成立。 a=e。即G中只有一个元素，这与|G|≥2矛盾。故在元素不少于两个的群中不存在零元。

例3 在一个群<G, \*>中，若A和B 都是G的子群。若A∪B=G，则A=G或B=G。

问题解析：命题结论A=G或B=G的否定是A≠G且B≠G。我们希望能推出一个与已知A∪B=G矛盾的结论，即找出一个元素属于A∪B但不属于G。由于A∪B=G，故A不是B的子集，B 也不是A的子集，即存在a∈A, a∉B且b∈B, b∉A。接下来就是想办法证明a\*b∉A且a\*b∉B。这就要利用A和B都是G的子群的条件了。这样我们就完成了用反证法证明的整个推理过程。

证明：

用反证法证明。

若A≠G且B≠G，则有a∈A, a∉B且b∈B, b∉A。因为A，B都是G的子群，故a,b∈G，从而a\*b∈G。

因为a∈A，所以a-1∈A。若a\*b∈A, 则b= a-1\*(a\*b)∈A，这与a∉B矛盾。从而a\*b∉A。

同理可证a\*b∉B。

综合可得a\*b∉A∪B=G，这与已知矛盾。从而假设错误，得证A=G或B=G。

例4 设T=<V, E>是一棵树，若|V|>1，则T中至少存在两片树叶。

问题解析：命题结论“T中至少存在两片树叶”的否定是“T中至多只有一片树叶”。我们希望能推出一个与树的性质矛盾的结论。树叶就是度中树中度为1的顶点，其余的顶点度数就大于等于2，且树的边数等于顶点数减1。欧拉握手定理把顶点的度数和边数联系起来。按照这样的思路我们想法得出两个相互矛盾的结论。这样我们就完成了用反证法证明的整个推理过程。

证明：用反证法证明。

设|V|=n。因为T=<V, E>是一棵树，所以|E|=n-1。

由欧拉握手定理可得 deg(v)=2|E|=2n-2。

假设T中最多只有1片树叶，则deg(v)≥2(n-1)+1>2n-2。

得出矛盾。

**38. 在《离散数学》的证明题中，构造法如何使用？**

**答：**

在证明“存在某一个事物”之类的结论时，我们常常会根据对条件和结论的分析，构造出一个符合结论要求的事物实例，以证明成立。这种证明方法就称之为构造法。

构造法是一种富有创造件的解题方法。在《离散数学》课程的整个学习过程中，经常强调具有构造性特点的一系列问题解决方法，因此它非常重视“能行性”的研究：即要解决一个问题，不光要证明该问题解的存在性（连续数学只要做到这一步就基本上算解决问题了），还要给出解决该问题的解的步骤来。在《离散数学》的证明题中，如果采用构造法证明，则证明的过程往往就是对解题算法的描述。

例1 在一个有n个顶点的G=<V, E>中，u, v∈V。若存在一条从u到v的一条通路，则必有一条从u到v的长度不超过n-1的通路。

问题解析：象这类存在性命题在图论中比较多见，往往就可采用构造性证明方法，问题的关键就是找出命题结论所要求的通路。证明的思路是从某一个事物出发，就象计算机程序中的循环语句一样用同样的过程根据要求对之进行加工，在有限步内得到所求。

证明：

设v0e1v1e2…elvl是从u=v0到v=vl的长为*l*的通路。

若l≤n-1，则结论显然成立。

否则因为l+1>n，故v0,v1,…,vl中必有一个顶点是重复出现的。不妨设vi=vj（0≤i<j≤l），则新通路v0e1v1e2…viej+1vj+1ej+2vj+2…elvl是一条从u 到v的通路，且此通路长度比原通路长度至少少1。

若新通路的长度n-1，则结论得证。否则对新通路重复上述过程，必可以得到一条从u到v的长为n-1的通路。

例2 一个有向图是单向连通图它有一条经过所有结点的路。

问题解析：这也是图论中的存在性命题，可采用构造性证明方法。先找出一条经过若干个顶点的通路。然后想办法将这条路进行变化，使得它经过的顶点越来越多，直到得到一条经过所有顶点的路。

证明：

设G=<V, E>是单向连通图。任取u, vV，则u可达v或v可达u。不妨设u可达v，即从u到v有路径P1。

若P1经过G中所有顶点至少一次，则P1就是满足结论要求的路径。否则若P1没有经过顶点w，则如果v经过路径T可达w, 连接P1和T我们可得一条经过P1经过的所有顶点及w的更长的路径P2；否则若w经过路径S可达u，连接S和P1我们也可得一条经过w及P1经过的所有顶点的更长的路径P2；再否则我们一定可以找到P1经过的两个相邻顶点t和s，t到s有边，t经过路径T1可达w，w经过路径T2可达s（否则就与u可达w，w可达v矛盾），我们构造这样一条路径P2：从u出发经过P1到达t，t经过路径T1到达w，再从w出发经过路径T2到达s，然后从s出发经过P1到达v。这是一条经过w及P1所经过的所有顶点的更长的路径。

P P

u v u v

T S

w w

P

u  t s v

T T

w

对P2重复上述过程，直到得到一条经过所有顶点的路径为止。

例3 任一有限半群一定在等幂元。

问题解析：这是代数结构中的存在性命题，也可采用构造性证明方法。由于半群的性质有限，只有结合律可用。因此证明时要充分利用元素个数的有限性和半群的运算满足结合律，具体构造出一个等幂元。

证明：

设<S, \*>是一个有限半群。任取aS，由于\*满足结合律，我们有

{a, a2, a3, …, an, …}S

因为S是有限集合，故a, a2, a3, …, an, …不可能两两不同。从而一定存在正整数k, m, 1≤k<m

使得ak=am。

令p=m-k，则由于\*满足结合律，ak=am= ap\*ak。对任意正整数qk，有

aq= ak\*aq-k =(ap\*ak)\*aq-k= ap\*aq （#）

若p=q，则元素ap就是一个等幂元。否则因为p≥1，故存在正整数n满足np≥k。故利用（#）可得 anp= ap\*anp= ap\*(ap\*anp)=a2p\*anp= a2p\*(ap\*anp=a3p\*anp=……= anp\*anp。

故anp就是S的一个等幂元。

**39. 在《离散数学》的证明题中，数学归纳法如何使用？**

**答：**

在由一系列有限的特殊事例得出一般性结论的推理方法称为归纳法。而数学归纳法则是用于证明与自然数n有关的结论的归纳法：如果我们能够证明当n=1时结论是成立的，而且我们能用相同的方法由n=1命题成立证得n=2命题也成立；由n=2命题成立证得n=3成立；由n=3命题成立证得n=4成立…而且这个过程显然可以无穷进行下去。则我们就断言对于所有自然数n命题都是成立的。

数学归纳法的理论基础是正整数的良序理论：设A是自然数集N的任一非空子集，则A中元素关于小于等于关系均有最小元。

设n0是一个自然数，且性质P(n)对n0满足。若能证明对任意n（n≥n0），P(n)→P(n+1)为真，则对于任意n（n≥n0），P(n)为真。这就是数学归纳法的基本原理。其推理结构可用谓词逻辑的永真式表示：

(P(n0)∧∀n(n≥n0)(P(n)→P(n+1)))→∀n(n≥n0)P(n)

所以数学归纳法的证明可分为两步：

（1）归纳基础：证明P(1)（或P(0)或P(n0)）为真；

（2）归纳推导：对∀n(n≥n0)，假设P(n)为真，能推导出P(n+1)为真。

第二数学归纳法原理：

（1）归纳基础：证明P(1)（或P(0)或P(n0)）为真；

（2）归纳推导：对∀n(n≥n0)，假设P(n0)，P(n0+1)，……，P(n)为真，能推导出P(n+1)为真。

当结论与多个自然数有关时这样一类题目的时候，要注意的一点就是对所要进行归纳的自然数的选择。

例1 对群<G,\*>的任意元素 a, b，及任何正整数m, n，am\*an= am+n。

问题解析：这是自然数有关的结论。但这里涉及到两个自然数，但由元素的幂的定义以及m和n的作用的对称性，故只要任意选择其中一个即可。

证明：用数学归纳法对n进行归纳证明。

对任何正整数m，当n=0时，有 am\*an= am\*a0= am\*e=am+0。故结论成立。

假设当 n=k时， am\*ak=am+k。则当n=k+1时，由\*满足结合律、元素的幂的定义及归纳假设am \*ak+1= am \*(ak\*a)= (am \*ak)\*a=am+k\*a=am+(k+1)，即结论对n=k+1也成立。

故对任何正整数m, n, 有am\*an= am+n。

例2 设d1, d2, …, dn 为n个正整数，n≥2, 并且=2n-2。证明：存在n个顶点的树T使它的顶点度数分别是d1, d2, …, dn。

问题解析：在这个问题中，结论显然与顶点的个数n有关。故对n进行归纳，先构造出具有2个顶点满足条件的树。然后假设已经构造出具有k个顶点的树，由此构造出具有k+1个顶点的树。数学归纳法成功的关键是如何从k+1个顶点的树找出一个叶节点，将该叶节点从树上删去后，得到的图仍是一棵具有 同样性质但只有k个顶点的树。

证明：用数学归纳法对顶点数n进行归纳。

当n=2时，由于d1, d2都是正整数，且d1+d2= 2，故d1=d2=1。显然具有2个顶点的树的度数都是1。

假设当n=k（k≥2） 时，命题成立，即对任k个和为2k-2的正整数，总有k个顶点的树，使它的k个顶点的度数分别是这k个正整数。现在考虑n=k+1的情形。

设d1, d2, …, dk+1 为满足=2k 的k+1个正整数，则d1, d2, …, dk+1中必定有一个为1（否则d1, d2, …, dk+1都大于等于2，从而≥2（k+1）>2k，从而与已知条件=2k矛盾）。另外d1, d2, …, dk+1中必定有一个大于1（否则d1, d2, …, dk+1都等于1，从而=k+1<2k，从而也与已知条件=2k矛盾）。不妨设d1=1且d2≥2。从而d2-1, d3, …, dk+1是k个正整数，且因为=2且d1=1，所以d2-1, d3, …, dK+1的和为2k-2。

根据归纳假设，存在一棵有k个节点的树T1，其节点的度数分别是d2-1, d3, …, dk+1。设T1中度数为d2-1的顶点是u，我们现在在T1上添加顶点v，并在顶点v和u之间增加一条边，得到T，则T仍为树，且u的度数从d2-1变成了d2，v的度数为1，其余各顶点度数不变。则这样得到的树T有k+1个顶点且各顶点的度数分别为d1（=1）, d2, …, dk+1。

从而命题得证。

例3 设有n个顶点m条边的无向连通图T满足m = n-1，则T无简单回路。

问题解析：这实际上是无向树的一个判定条件。在这个问题中，结论显然与两个自然数：顶点数n和边数m有关。但是由条件m=n-1，m和n是相互信赖的。但从图论的相关知识判断（如欧拉握手定理等），对n进行归纳比较简便。故先验证2个顶点满足题目条件的图。然后假设对具有k个顶点的题设的图，结论是成立的。考虑具有k+1个顶点的满足题设的图时，数学归纳法成功的关键是如何从k+1个顶点的图找出一个叶节点，将该叶节点从该图中删除后，得到的图仍是一个满足题设但只有k个顶点的图。

证明：先证T无简单回路，为此用数学归纳法对顶点n进行归纳。

当n =2时显然T无简单回路，因这时m = n – 1 =1，T中只有一条边。

假设当顶点数为k（3）时，满足题目条件的图无简单回路。下面考虑顶点数为k+1时满足题目条件的图T。因为T有k条边，由欧拉握手定理知，T中所有顶点度数之和是2k。但由于T有k+1个顶点且T是连通图，故T至少有一个度数为1的顶点，将这个顶点从T上去掉得到一个新图T1。显然T1仍是连通图，且它有k-1条边，k个顶点。故由由归纳假设得T1无简单回路。由于T和T1的关系可知，故T也没有简单回路。

从而满足题目条件的图T是没有简单回路的。