**![2006099C[1]]() 拓展资源**

**6. 第一次数学危机**

第一次数学危机，是数学史上的一次重要事件，发生于大约公元前400年左右的古希腊时期，自边长为1的对角线长度的发现起，到公元前370年左右，以无理数的定义出现为结束标志。这次危机的出现冲击了一直以来在西方数学界占据主导地位的毕达哥拉斯学派，同时标志着西方世界关于无理数的研究的开始。

大约在公元前5世纪，毕达哥拉斯学派的[希帕索斯](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%8C%E5%B8%95%E7%B4%A2%E6%96%AF)（Hippasus）发现了：边长为1的正方形的对角线长度不能用整数或[分数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E6%95%B0)来表达。于是毕达哥拉斯学派对这个新发现的“怪数”保密，可希帕索斯则无意中泄露了这个发现，于是据传被毕达哥拉斯学派的人扔进大海淹死了。这个事实使毕达哥拉斯学派的人感到迷惑不解。它不仅违背了毕达哥拉斯派的信条，而且冲击着当时希腊人持有的“一切量都可以用有理数表示”的信仰。所以，通常人们就把希帕索斯发现的这个矛盾，叫做希帕索斯悖论。

约在公元前370年，柏拉图的学生[攸多克萨斯](http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%94%B8%E5%A4%9A%E5%85%8B%E8%90%A8%E6%96%AF&action=edit&redlink=1)（Eudoxus，约公元前408—前355）解决了关于无理数的问题。他纯粹用公理化方法创立了新的比例理论，微妙地处理了可公度和不可公度。他处理不可公度的办法，被[欧几里得](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97)《[几何原本](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%8E%9F%E6%9C%AC)》第二卷（比例论）收录。并且和狄德金于1872年绘出的无理数的现代解释基本一致。

**7. 模糊集合与模糊理论**

“模糊”是人类感知万物、获取知识、思维推理、决策实施的重要特征。“模糊”比“清晰”所拥有的信息容量更大，内涵更丰富，更符合客观世界。

在日常生活中，人们的思维中有许多模糊的概念，如大、小、冷、热等，都没有明确的内涵和外延，只能用模糊集合来描述。

普通的集合是指具有某种属性的对象的全体。这种属性所表达的概念应该是清晰的，界限分明的。因此每个对象对于集合的隶属关系也是明确的，非此即彼。而许多模糊的概念，所描述的对象属性不能简单地用“是”或“否”来回答。因此模糊集合就是指具有某个模糊概念所描述的属性的对象的全体。由于概念本身不是清晰的、界限分明的，因而对象对集合的隶属关系也不是明确的、非此即彼的。

设A是集合X到[0，1]的一个映射，A：X→[0，1]，x→A(x) 则称A是X上的模糊集，A(x)称为模糊集A的[隶属函数](http://baike.baidu.com/view/150383.htm)，或称A(x)为x对模糊集A的隶属度。

这一概念是美国加利福尼亚大学伯克利分校电气工程系[控制论](http://baike.baidu.com/view/62820.htm)专家L.A.扎德（L.A.zadeh）于 1965 年首先提出的。模糊集合这一概念的出现使得数学的思维和方法可以用于处理[模糊性](http://baike.baidu.com/view/2045546.htm)现象，从而构成了模糊[集合论](http://baike.baidu.com/view/26152.htm)的基础。模糊集合理论突破了19世纪末康托尔的经典集合理论，奠定模糊理论的基础。

模糊理论是在模糊集合理论的数学基础上发展起来的，主要包括模糊集合理论、模糊逻辑、模糊推理和模糊控制等方面的内容。

模糊逻辑指模仿人脑的不确定性概念判断、推理思维方式，应用模糊集合和模糊规则进行推理，表达过渡性界限或定性知识经验，模拟人脑方式，实行模糊综合判断，推理解决常规方法难于对付的规则型模糊信息问题。模糊逻辑善于表达界限不清晰的定性知识与经验，它借助于[隶属度函数](http://baike.baidu.com/view/3977584.htm)概念，区分[模糊集合](http://baike.baidu.com/view/970713.htm)，处理模糊关系，模拟人脑实施规则型推理，解决因“排中律”的逻辑破缺产生的种种不确定问题。

模糊逻辑不是二值逻辑——非此即彼的推理，它也不是传统意义的[多值逻辑](http://baike.baidu.com/view/448661.htm)，而是在承认事物隶属真值中间过渡性的同时，还认为事物在形态和类属方面具有亦此亦彼性、模棱两可性——模糊性。正因如此，模糊逻辑可以处理不精确的模糊输入信息，可以有效降低感官灵敏度和精确度的要求，而且所需要存储空间少，能够抓住信息处理的主要矛盾，保证信息处理的实时性、多功能性和满意性。

模糊推理是指以模糊[集合论](http://baike.baidu.com/view/26152.htm)为基础描述工具，对以一般集合论为基础描述工具的[数理逻辑](http://baike.baidu.com/view/45218.htm)进行扩展，从不精确的前提集合中得出可能的不精确结论的推理过程。

模糊理论应用最有效，最广泛的领域就是模糊控制。所谓模糊控制，就是在控制方法上应用模糊集理论、模糊语言变量及模糊逻辑推理的知识来模拟人的模糊思维方法，用计算机实现与操作者相同的控制。

人们常用的经验规则都是用模糊条件语句表达。例如，当我们拧开水阀往水桶里注水时，有这样的经验：桶里没水或水较少时，应开大水阀，桶里水较多时，应将水阀关小些，当水桶里水快满时，则应把阀门关得很小，而水桶里水满时应迅速关掉水阀。其中，“较少”、“较多”、“小一些”、“很小”等，这些表示水位和控制阀门动作的概念都具有模糊性。即有经验的操作人员的控制规则具有相当的模糊性。模糊控制就是利用[计算机模拟](http://wiki.mbalib.com/wiki/%E8%AE%A1%E7%AE%97%E6%9C%BA%E6%A8%A1%E6%8B%9F)人的[思维方式](http://wiki.mbalib.com/wiki/%E6%80%9D%E7%BB%B4%E6%96%B9%E5%BC%8F)，按照人的操作规则进行控制，实现人的控制经验。

模糊控制在各种领域出人意料的解决了传统控制理论无法解决的或难以解决的问题，并取得了一些令人信服的成效。

**8. 粗糙集理论**

在自然科学、社会科学和工程技术的很多领域中，都不同程度地涉及到对不确定因素和对不完备信息的处理。从实际系统中采集到的数据常常包含着噪声，不够精确甚至不完整。采用纯数学上的假设来消除或回避这种不确定性，效果往往不理想。反之，如果正视它对这些信息进行合适地处理，常常有助于相关实际系统问题的解决。

多年来，研究人员一直在努力寻找科学地处理不完整性和不确定性的有效途径。模糊集和基于[概率](http://baike.baidu.com/view/45320.htm)方法的证据理论是处理不确定信息的两种方法，已应用于一些实际领域。但这些方法有时需要一些数据的附加信息或先验知识，如模糊隶属函数、基本概率指派函数和有关统计概率分布等，而这些信息有时并不容易得到。

粗糙集理论作为一种数据分析处理理论，在1982年由[波兰](http://baike.baidu.com/view/21934.htm)科学家Z.Pawlak创立。最开始由于语言的问题，该理论创立之初只有[东欧](http://baike.baidu.com/view/393319.htm)国家的一些学者研究和应用它，后来才受到国际上数学界和计算机界的重视。1991年，Pawlak出版了《粗糙集—关于数据推理的理论》这本专著，从此粗糙集理论及其应用的研究进入了一个新的阶段。1995年ACM将粗糙集理论列为新兴的计算机科学的研究课题。

粗糙集理论这一新的数学理论也成为信息科学领域的研究热点问题之一。粗糙集理论不仅为信息科学和认知科学提供了新的科学逻辑和[研究方法](http://baike.baidu.com/view/1702413.htm)，而且为智能信息处理提供了有效的处理技术。

1992年在波兰Kiekrz召开的第一届国际粗糙集合研讨会着重讨论了集合近似定义的基本思想及其应用和粗糙集合环境下的机器学习基础研究，从此每年都会召开一次以粗糙集理论为主题的国际研讨会，从而推动了粗糙集理论的拓展和应用。

[粗糙集理论](http://baike.baidu.com/view/223951.htm)它是一种刻划不完整性和不确定性的[数学工具](http://baike.baidu.com/view/750697.htm)，能有效地分析不精确（imprecise)，不一致（inconsistent)、不完整（incomplete) 等各种不完备的信息，还可以对数据进行分析和推理，从中发现隐含的知识，揭示潜在的规律。它建立在分类机制的基础上，它将分类理解为在特定空间上的[等价关系](http://baike.baidu.com/view/513943.htm)，而等价关系构成了对该空间的划分。[粗糙集理论](http://baike.baidu.com/view/223951.htm)将知识理解为对数据的划分，每一被划分的集合称为概念。[粗糙集理论](http://baike.baidu.com/view/223951.htm)的主要思想是利用已知的知识库，将不精确或不确定的知识用已知的知识库中的知识来（近似） 刻画。

该理论与其他处理不确定和不精确问题理论的最显著的区别是：它无需提供问题所需处理的数据集合之外的任何先验信息，所以对问题的不确定性的描述或处理可以说是比较客观的，由于这个理论未能包含处理不精确或不确定原始数据的机制，所以这个理论与[概率论](http://baike.baidu.com/view/45337.htm)、[模糊数学](http://baike.baidu.com/view/24364.htm)和证据理论等其他处理不确定或不精确问题的理论有很强的[互补性](http://baike.baidu.com/view/3805017.htm)。

由于粗糙集理论创建的目的和研究的出发点就是直接对数据进行分析和推理，从中发现隐含的知识，揭示潜在的规律，因此是一种天然的[数据挖掘](http://baike.baidu.com/view/7893.htm)或者[知识发现](http://baike.baidu.com/view/77853.htm)方法，它与基于[朴素贝叶欺理论](http://baike.baidu.com/view/45337.htm)的数据挖掘方法、基于[模糊理论](http://baike.baidu.com/view/1443826.htm)的数据挖掘方法和基于证据理论的数据挖掘方法等其他处理不确定性问题理论的方法相比较，最显著的区别是它不需要提供问题所需处理的数据集合之外的任何先验知识，而且与处理其他不确定性问题的理论有很强的[互补性](http://baike.baidu.com/view/3805017.htm)（特别是模糊理论）。

**9. Cantor猜想----连续统假设（CH）**

集合可分为有限集与无限集。有限集的基数就是集合中的元素个数。而无限集又可分为可数集（也叫可数无限集）和不可数集。所有无限集都有无穷多个元素，可以利用双射来判定两个无限集的基数相等。所有可数集合的基数是ℵ0（读作阿列夫零），自然数集N、整数集Z、有理数集Q以及平面上所有坐标都为有理数的点集Q×Q都是可数集。而实数集R、无理数集以及复数集C都是不可数集，它们的基数都是ℵ。

有没有集合，其基数比ℵ还大呢？Cantor定理告诉我们，可以构造出基数越来越大的集合。事实上，对任何集合A，|A|<|P(A)|（P(A)是A的幂集）。所以实数签订R的幂集的基数就比ℵ大。

现在的问题是，在ℵ0和ℵ之间还有没有其他的基数呢，即是否存在集合，它的基数在ℵ0和ℵ之间？Cantor早在十九世纪（1883年）就提出了一个猜想：不存在介于ℵ0和ℵ之间的基数。这就是所谓的连续统假设。1900年数学家希尔伯特在巴黎世界数学家大会上提出的23个未解决的数学问题中就有连续统问题，即Cantor的连续统假设是否成立。这是目前为止还未得到解决的问题。

为了解决集合论中的悖论，产生了许多公理集合论。1938年，哥德尔证明了连续统假设相对于集合论的其他公理是相容的，而在1963年Cohen证明了连续统假设的否定对于其他公理也是相容的。这说明了连续统假设完全独立于集合论的其他公理。从而承认不承认连续统假设成立产生了不同的公理化集合论，凡是承认Cantor的连续统假设成立的集合论统称为Cantor集合论，否则称为非Cantor集合论。

**10. 格奥尔格··康托尔（Georg Cantor）**

格奥尔格·费迪南德·路德维希·菲利普·康托尔（德国数学家、哲学家，1845～1918），康托尔出生于[俄国](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BF%84%E5%9B%BD)[圣彼得堡](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%A3%E5%BD%BC%E5%BE%97%E5%A0%A1)，他的父亲是[丹麦](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%B9%E9%BA%A6)商人，母亲是俄国音乐家。[1856年](http://zh.wikipedia.org/wiki/1856%E5%B9%B4)他们全家搬到德国，康托尔在德语学校继续学业，[1867年](http://zh.wikipedia.org/wiki/1867%E5%B9%B4)他于[柏林大学](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9F%8F%E6%9E%97%E5%A4%A7%E5%AD%A6)获得博士学位。

他是公认的[集合论](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%86%E5%90%88%E8%AE%BA)奠基人。当代数学家绝大多数接受康托尔的理论，并认为这是数学史上一次重要的变革。[大卫·希尔伯特](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%A7%E5%8D%AB%C2%B7%E5%B8%8C%E5%B0%94%E4%BC%AF%E7%89%B9)说：“没有人能够把我们从康托尔建立的乐园中赶出去。”

康托尔还提出了通过一一对应的方法（双射）对无限集合的大小进行比较，并将能够彼此建立一一对应的集合称为[等势](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%89%E5%8A%BF)，即可以被认为是“一样大”的。他引入了[可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%AF%E6%95%B0%E6%97%A0%E7%A9%B7)的概念，用来指与[自然数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%87%AA%E7%84%B6%E6%95%B0)集合等势的集合，并证明了[有理数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9C%89%E7%90%86%E6%95%B0)集合也是可数无穷的，而[实数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%9E%E6%95%B0)集合不是[可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%AF%E6%95%B0%E6%97%A0%E7%A9%B7)的，这表明无穷集合的确存在着不同的大小，他称与实数等势（从而不是[可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%AF%E6%95%B0%E6%97%A0%E7%A9%B7)）的集合为[不可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E5%8F%AF%E6%95%B0%E9%9B%86)。原始证明发表于[1874年](http://zh.wikipedia.org/wiki/1874%E5%B9%B4)，这个证明使用了较为复杂的归纳反证法。[1891年](http://zh.wikipedia.org/wiki/1891%E5%B9%B4)他用[对角线法](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%8D%E8%A7%92%E8%AB%96%E8%AD%89%E6%B3%95)重新证明了这个定理。另外，他证明了[代数数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0%E6%95%B0)集合是可数集，以及n维空间与一维空间之间存在一一对应。在上述理论的基础上，康托尔又系统地研究了[序数](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%8F%E6%95%B0)理论，提出了[良序原理](http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E8%89%AF%E5%BA%8F%E5%8E%9F%E7%90%86&action=edit&redlink=1)，即可以给任何集合内的所有元素定义一个大小关系，使得任意两个元素都可以比较大小，且该集合的任意子集都有最小元素。康托尔晚年致力于证明他自己提出的[连续统假设](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9E%E7%BB%AD%E7%BB%9F%E5%81%87%E8%AE%BE)，即任意实数的无穷集合或者是[可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%AF%E6%95%B0%E6%97%A0%E7%A9%B7)或者是[不可数无穷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E5%8F%AF%E6%95%B0%E9%9B%86)，二者必居其一，但没有成功。

康托尔的后半生受到[抑郁症](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8A%91%E9%83%81%E7%97%87)的困扰，这严重影响他的工作，他不得不经常入院治疗。根据后来他发表的论文推测，他患的可能是[躁郁症](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BA%81%E9%83%81%E7%97%87)。他曾写了一篇验证1000以下的[歌德巴赫猜想](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%8C%E5%BE%B7%E5%B7%B4%E8%B5%AB%E7%8C%9C%E6%83%B3)的论文，其实几十年前已经有人验证到了10000。他又发表了几篇文学方面的论文，试图证明[弗兰西斯·培根](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%97%E5%85%B0%E8%A5%BF%E6%96%AF%C2%B7%E5%9F%B9%E6%A0%B9)其实是[莎士比亚](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%8E%E5%A3%AB%E6%AF%94%E4%BA%9A)作品的真正作者。他还写了几篇[神学](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A5%9E%E5%AD%A6)方面的论文，企图证明绝对无穷的概念即是[上帝](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8A%E5%B8%9D)。第一次世界大战期间，他陷于赤贫状态，最后死于[哈雷](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%88%E9%9B%B7_%28%E5%BE%B7%E5%9B%BD%29)大学的精神病院。