**![2006099C[1]]() 拓展资源**

**1. 集合论的历史**

集合论是一门研究数学基础的学科。集合论是现代数学的基础，是数学不可或缺的基本描述工具。可以这样讲，现代数学与离散数学的“大厦”是建立在集合论的基础之上的。21世纪数学中最为深刻的活动，就是关于数学基础的探讨。这不仅涉及到数学的本性，也涉及到演绎数学的正确性。数学中若干悖论的发现，引发了数学史上的第三次危机，而这种悖论在集合论中尤为突出。

集合论是德国著名数学家康托尔（G.Cantor）于19世纪末创立的。

十七世纪数学中出现了一门新的分支：微积分。在之后的一二百年中这一崭新学科获得了飞速发展并结出了丰硕成果。其推进速度之快使人来不及检查和巩固它的理论基础。十九世纪初，许多迫切问题得到解决后，出现了一场重建数学基础的运动。正是在这场运动中，康托尔开始探讨了前人从未碰过的实数点集，这是集合论研究的开端。1874年，德国数学家康托尔在著名的《克雷尔数学杂志》上发表了关于无穷集合论的第一章革命性文章。从1874年到1884年，康托尔的一系列关于集合的文章，奠定了集合论的基础。他对集合所下的定义是：把若干确定的、有区别的（不论是具体的或抽象的）事物合并起来，看作一个整体，其中各事物称为该集合的元素。

没想到集合论一诞生就遭到了许多数学家的激烈反对，当时的权威数学家克罗内克（Kronecker）非常敌视康托尔的集合论思想，时间达整整十年之久，法国数学大家庞加莱（Poincare）则预测后一代人将把集合论当作一种疾病。在猛烈的攻击下与过度的用脑思考中，康托尔本人一度成为这一激烈论争的牺牲品，他得了精神分裂症，几次陷于精神崩溃。

然而乌云遮不住太阳，经历二十余年后，集合论最终获得了世界公认。到二十世纪初集合论已得到数学家们的赞同。数学家们乐观地认为从算术公理系统出发，只要借助集合论的概念，便可以建造起整个数学的大厦。在1900年第二次国际数学大会上，著名数学家庞加莱就曾兴高采烈地宣布“……数学已被算术化了。我们可以说，现在数学已经达到了绝对的严格。”然而这种自得的情绪并没能持续多久。英国哲学家罗素（Russell）就很怀疑数学的这种严密性，他经过三年的苦思冥想，于1902年找到了一个能证明自己观点的简单明确的“罗素悖论”。不久，集合论是有漏洞的消息迅速就传遍了数学界。

罗素构造了一个所有不属于自身（即不包含自身作为元素）的集合R。现在问R是否属于R？如果R属于R，则R满足R的定义，因此R不应属于自身，即R不属于R；另一方面，如果R不属于R，则R不满足R的定义，因此R应属于自身，即R属于R。这样，不论何种情况都存在着矛盾（为了使罗素悖论更加通俗易懂，罗素本人在1919年将其改写为“理发师悖论”）。这一仅涉及集合与属于两个最基本概念的悖论如此简单明了以致根本留不下为集合论漏洞辩解的余地。号称“天衣无缝”、“绝对严密”的数学陷入了自相矛盾之中。从此整个数学的基础被动摇了，由此引发了数学史上的第三次数学危机。、

危机产生后，众多数学家投入到解决危机的工作中去。1908年，德国数学家策梅罗（E.Zermelo）提出公理化集合论，试图把集合论公理化的方法来消除悖论。他认为悖论的出现是由于康托尔沒有把集合的概念加以限制，康托尔对集合的定义是含混的．策梅罗希望简洁的公理能使集合的定义及其具有的性質更为显然。策梅罗的公理化集合论后来演变成ZF或ZFS公理系统。从此原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现。这就是集合论发展的第二个阶段：公理化集合论。与此相对应，在1908年以前由康托尔创立的集合论被称为朴素集合论。公理化集合论是对朴素集合论的严格处理。它保留了朴素集合论的有价值的成果并消除了其可能存在的悖论，因而较圆满地解决了第三次数学危机。公理化集合论的建立，标志着著名数学家希耳伯特所表述的一种激情的胜利，他大声疾呼：没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶出去。

**2. 集合论在计算科学中的应用**

起初，集合论主要是对分析数学中的“数集”或几何学中的“点集”进行研究。但是随着科学的发展，集合论的概念已经深入到现代各个方面，成为表达各种严谨科学概念必不可少的数学语言。

随着计算机时代的到来，集合的元素已由传统的“数集”和“点集”拓展成包含文字、符号、图形、图表和声音等多媒体信息，构成了各种数据类型的集合。集合不仅可以用来表示数及其运算，更可以用来表示和处理非数值信息。数据的增加、删除、修改、排序以及数据间关系的描述等这些很难用传统的数值计算操作，可以很方便地用集合运算来处理。从而集合论在编译原理、开关理论、信息检索、形式语言、数据库和知识库、CAD、CAM、CAI及AI等各个领域得到了广泛的应用，而且还得到了发展，如扎德（Zadeh）的模糊集理论和保拉克（Pawlak）的粗糙集理论等等。集合论的方法已经成为计算科学工作者不可缺少的数学基础知识。

比如，数据结构研究非数值性程序中计算机操作的对象以及它们之间的关系和运算，这是计算机科学中一门综合性的专业基础课程。数据结构的研究不仅涉及到计算机硬件，而且与算法、计算机软件的研究有着更密切的关系。在计算学科中, 数据结构不仅是一般程序设计（特别是非数值性程序设计）的基础，而且是设计和实现编译程序、操作系统、数据库系统及其它系统程序和大型应用程序的重要基础。而大部分数据结构，如线性表、串、树、图等都可用集合论中的关系表示出。

**3. 公理化方法及其作用**

在计算科学的发展中，公理化方法曾在一些分支学科的发展中得到广泛应用并产生重要的影响。例如，在形式语义学和程序理论的研究中，公理语义学一直占有重要的地位。一些软件开发工具也是用到了这种思想。

所谓公理化方法，就是从尽可能少的坎无需定义的原始概念（基本概念）和尽可能少的一组不加证明的原始命题（基本公理、公设）出发，应用严格的逻辑推理规则，用演绎推理来对一门学科进行研究的方法。

公理系统有一定的要求：无矛盾性、完备性和独立性。显然，在构建一门完整的科学理论体系时，所建立的公理系统必须无矛盾性，即在该系统中不能推出自相矛盾的结论。另外，完备性要求所建立的公理系统应尽可能多地推出这门科学中已经客观存在的结论，最好是能推出全部的结论（但哥德尔（Godel）业已证明完备的公理系统是不存在的）。独立性要求基本公理不多不少，任何一条公理都不能从其他公理中推出来。

对一门科学公理化的目的是在于把该门学科表述为一个演绎系统，并通过对基本概念的选取、公理的设计，以及严格的演绎推理过程的研究，揭示这门学科深刻的内在规律，确保这门学科的表述更加严谨、准确。公理化方法主要有如下的作用：（1）分析和总结学科知识的作用；（2）把学科的基础搞清楚的作用，从而有助于在学科的深层次比较和统一不同的子学科，启发、促进和推动新理论的 创立；（3）在科学方法论上有示范作用，它对各门学科新建立 具有很好的借鉴作用。

**4. 集合论中的悖论**

所谓悖论就是逻辑矛盾：如果假定语句所指为真，那么会推出语句所指为假；反之，如果假定语句所指为假，又会推出语句所指为真。真是说它对也不是，不对也不是，让人左右为难。古今中外有不少著名的悖论，它们震撼了逻辑和数学的基础，激发了人们求知和精密的思考，吸引了古往今来许多思想家和爱好者的注意力。解决悖论难题需要创造性的思考，因此悖论的解决往往可以给人带来全新的观念，从而悖论的出现和解决往往成为数学发展的一种内在动力。

1）理发师悖论：在萨维尔村，理发师挂出一块招牌：“我只给村里所有那些不给自己理发的人理发。”有人问他：“你给不给自己理发？”理发师顿时无言以对。

因为这是一个矛盾推理：如果理发师不给自己理发，他就属于招牌上的那一类人。有言在先，他应该给自己理发。反之，如果这个理发师给他自己理发，根据招牌所言，他只给村中不给自己理发的人理发，他不能给自己理发。

因此，无论这个理发师怎么回答，都不能排除内在的矛盾。这个悖论是罗素给出的对一九零二年提出来的集合论悖论——“罗素悖论”所作的一个通俗的、有故事情节的表述。

2）由“自指”引发的悖论：有人说“我现在在说慌”。如果他在说谎，那么“我现在在说谎”就是一个谎，因此他说的是实话；但是如果这是实话，他又在说谎。矛盾不可避免。它的一个翻版是：“这句话是错的”。

这类悖论的一个标准形式是：如果事件Ａ发生，则推导出非Ａ，非Ａ发生则推导出Ａ，这是一个自相矛盾的无限逻辑循环。

3）集合论悖论——“罗素悖论”：“Ｒ是所有不包含自身的集合的集合。” 这是罗素（B. Russell）由于怀疑数学基础的严密性，于1902年找到的悖论。用集合的描述性定义方式可定义为R={S|SS}。于是就产生了这样的逻辑矛盾：若R包含R本身，则根据R的定义，RR，即R不属于R。若R不包含R本身，即RR，则根据R的定义，RR，即R包含R。

4）书目悖论：一个图书馆编纂了一本书名词典，它列出这个图书馆里所有不列出自己书名的书。那么它列不列出自己的书名？

这个悖论与理发师悖论基本一致。

5）最大集合论悖论：存在一个最大的集合，它是包含一切集合的集合。若设这个最大的集合是A，现在问：A是否包含它自己？如果A包含它自己，那么A就是A所包含的元素，于是A就不是最大的集合，与定义矛盾；而如果A不包含A，那么A就不是包含一切集合的集合，也与定义矛盾。无论A是否是最大的集合都会推出矛盾，这就是最大集合悖论。

这也和“罗素悖论”类似。

**5. 悖论对数学发展的积极作用**

悖论并非一无是处。虽然他们的出现会直接导致“数学危机”的产生，但是悖论的出现逼迫数学家投入最大的热情去解决它们。而在解决悖论的过程中，着数学本身也得到了发展。

第二次数学危机导源于微积分工具的使用。微积分这一锐利无比的数学工具问世。许许多多疑难问题运用这一工具后变得易如翻掌，从而显示出了它的非凡威力。但是不管是牛顿、还是莱布尼兹所创立的微积分理论都是不严格的。两人的理论都建立在无穷小分析之上，但他们对作为基本概念的无穷小量的理解与运用却是混乱的。因而，微积分一诞生就遭到了一些人的反对与攻击。其中攻击最猛烈的是英国大主教贝克莱。

贝克莱对牛顿的理论进行了攻击。他提出的问题在数学史上称为“贝克莱悖论”。笼统地说，贝克莱悖论可以表述为“无穷小量究竟是否为0”的问题。就无穷小量在当时的实际应用而言，它必须既是0，又不是0。但从形式逻辑而言，这无疑是一个矛盾。另外古希腊的大诡辩家芝诺（Zeno）的几个悖论阿基里斯悖论、二分法悖论（运动不存在）、“飞矢不动”悖论也反映出了有限与无限、无穷小与零、零与非零的逻辑矛盾。这些悖论在当时的数学界引起了一定的混乱，导致了第二次数学危机的产生。

为解决这一悖论，无数人投入了大量的劳动。法国数学家柯西首先给出了极限的定义；“若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一数值时，其差可任意小，则该固定值称为这一串数值的极限”。柯西之后，魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔各自经过自己独立深入的研究，都将分析基础归结为实数理论，各自建立了自己完整的实数体系。由此，沿柯西开辟的道路建立起来的严谨的极限理论与实数理论，完成了分析学的逻辑奠基工作。数学分析的无矛盾性问题归纳为实数论的无矛盾性，从而使微积分学这座人类数学史上空前雄伟的大厦建在了牢固可靠的基础之上。重建微积分学基础，这项重要而困难的工作就这样经过许多杰出学者的努力而胜利完成了。微积分学坚实牢固基础的建立，结束了数学中暂时的混乱局面，同时也宣布了第二次数学危机的彻底解决。

同样，以“罗素悖论”为代表的一系列悖论的出现导致了第三次数学危机。

为了消除悖论，数学家纷纷提出自己的解决方案。1908年，策梅罗提出第一个公理化集合论体系，后来经其他数学家改进，称为ZF系统。这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托尔朴素集合论的缺陷。除ZF系统外，集合论的公理系统还有多种，如诺伊曼等人提出的NBG系统等。公理化集合系统的建立，成功排除了集合论中出现的悖论，从而比较圆满地解决了第三次数学危机。同时，罗素悖论对数学而言有着更为深刻的影响。它使得数学基础问题第一次以最迫切的需要的姿态摆到数学家面前，导致了数学家对数学基础的研究。而这方面的进一步发展又极其深刻地影响了整个数学。如围绕着数学基础之争，形成了现代数学史上著名的三大数学流派：逻辑主义学派、形式主义学派和直觉主义学派，而各派的工作又都促进了数学的大发展。数理逻辑也取得了大发展，证明论、模型论、递归论、多值逻辑、非标准逻辑等相继问世。

第一次数学危机促成了公理几何与逻辑的诞生；第二次数学危机促成了分析基础理论的完善与集合论的创立；第三次数学危机促成了数理逻辑的发展与一批现代数学的产生。数学由此获得了蓬勃发展，这或许就是数学悖论重要意义之所在吧。